Série A, N° 2213
N° d'ordre : 3084

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

André MARÉCHAL
Ancien élève de l'École Normale Supérieure

1re THÈSE. — Étude des effets combinés de la diffraction et des aberrations géométriques sur l'image d'un point lumineux.

2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 13 juin 1947, devant la Commission d'examen.

MM. J. CABANES, *Président.*
F. CROZE, A. ARNULF } *Examinateurs.*

Éditions de la *Revue d'Optique théorique et instrumentale*
3 et 5, boulevard Pasteur — 165, rue de Sèvres
PARIS (15e)
1948

SÉRIE A, N° 2213
N° D'ORDRE : 3084

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

André MARÉCHAL
Ancien élève de l'Ecole Normale Supérieure

1re THÈSE. — **Étude des effets combinés de la diffraction et des aberrations géométriques sur l'image d'un point lumineux.**

2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 13 juin 1947, devant la Commission d'examen.

MM. J. CABANES, *Président.*
F. CROZE, A. ARNULF } *Examinateurs.*

Editions de la *Revue d'Optique théorique et instrumentale*
3 et 5, boulevard Pasteur — 165, rue de Sèvres
PARIS (15e)
1948

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

Doyen . . . . . M. JEAN CABANNES

PROFESSEURS

L. BLARINGHEM.	T	Botanique.
G. JULIA.	T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.
C. MAUGUIN. . .	T	Minéralogie.
A. DENJOY . . .	T	Théorie des Fonctions.
L. LUTAUD . . .	T	Géographie physique et Géologie dynamique.
E. DARMOIS. . .	T	Enseignement de Physique.
Robert LÉVY. .	T	Physiologie comparée.
Henri VILLAT. .	T	Mécanique des fluides et applications.
Ch. JACOB. . . .	T	Géologie.
P. PASCAL. . . .	T	Chimie générale.
M. FRÉCHET. . .	T	Calcul des Probabilités et Physique mathématique.
Mme RAMART-LUCAS	T	Chimie organique.
H. BÉGHIN . . .	T	Mécanique physique et expérimentale.
FOCH	T	Mécanique expérimentale des fluides.
PAUTHENIER. . .	T	Electrotechnique générale.
De BROGLIE. . .	T	Théories physiques.
JOB	T	Chimie générale.
PRENANT	T	Anatomie et Histologie comparées.
VILLEY	T	Mécanique appliquée.
COMBES.	T	Physiologie végétale.
GARNIER	T	Géométrie supérieure.
PÉRÈS.	T	Mécanique rationnelle.
HACKSPILL . . .	T	Chimie minérale.
LAUGIER	T	Physiologie générale.
TOUSSAINT . . .	T	Technique Aéronautique.
M. CURIE	T	Physique (P. C. B.).
G. RIBAUD. . . .	T	Hautes températures.
CHAZY	T	Mécanique analytique.
H. GAULT . . .	T	Chimie appliquée.
CROZE	T	Physique théorique et Physique céleste.
DUPONT.	T	Théories chimiques.
LANQUINE. . . .	T	Géologie structurale et géologie appliquée.
VALIRON	T	Calcul différentiel et calcul intégral.
BARRABÉ		Géologie structurale et géologie appliquée.
VAVON	T	Analyse et mesures chimiques.
G. DARMOIS . .	T	Mathématiques générales.
CHATTON	T	Biologie maritime.
AUBEL		Chimie biologique.
J. BOURCART. .		Géographie physique et Géologie dynamique.
Mme JOLIOT-CURIE.	T	Physique générale et Radioactivité.
PLANTEFOL . . .	T	Botanique.
CABANNES . . .	T	Recherches physiques.
GRASSÉ.	T	Zoologie (Evolution des êtres organisés).
PRÉVOST		Chimie organique.
BOULIGAND . .	T	Application de l'analyse à la Géométrie.
CHAUDRON . . .	T	Chimie.
WYART		Minéralogie.
TEISSIER	T	Zoologie.
MANGENOT . . .	T	Biologie végétale.
P. AUGER. . . .	T	Physique quantique et relativité.
MONNIER		Physiologie générale.
PIVETEAU		Géologie.
ROCARD	T	Physique.
H. CARTAN. . .		Calcul différentiel.
SCHAEFFER. . .	T	Physiologie des fonctions.
LAFFITTE. . . .		Chimie (P. C. B.).
LERAY		Mécanique théorique des fluides.
FAVART.		Calcul des probabilités et physique-mathématique.
COULOMB. . . .	T	Physique du globe.
Mlle COUSIN . .		Biologie animale (P. C. B.).
CHRÉTIEN . . .		Analyse et mesures chimiques.
KASTLER		Physique.
DRACH		Evolution des êtres organisés.
CHATELET	T	Arithmétique et théorie des nombres.
EPHRUSSI. . . .	T	Génétique.
WURMSER	T	Biologie physico-chimique.
BAUER.	T	Chimie physique.
RIVIÈRE.		Géologie (P. C. B.).
GAUTHERET. . .		Biologie Végétale (P. C. B.).
LUCAS		Physique.
MAX MORAND. .		Physique.
ARNULF		Optique appliquée.
A. THOMAS . . .		Zoologie.
SOLEILLET. . . .		Physique.
FORTER		Mécanique expérimentale des fluides.
DANJON	T	Astronomie.
FROMAJEOT. . . .		Chimie biologique.
LAPORTE		Physique générale et Radioactivité.

Secrétaire..... Ch. MONIER.

R. UNIV. BIBLIOTHEEK LEIDEN

A LA MÉMOIRE DE CHARLES FABRY

A MES MAITRES

PIERRE FLEURY

Directeur de l'Institut d'Optique

FRANÇOIS CROZE et ALBERT ARNULF

Professeurs à la Faculté des Sciences de Paris

A MES PARENTS

A MA FEMME

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41549216_0036

ÉTUDE DES EFFETS COMBINÉS DE LA DIFFRACTION ET DES ABERRATIONS GÉOMÉTRIQUES SUR L'IMAGE D'UN POINT LUMINEUX

par André MARÉCHAL

Ancien élève de l'Ecole Normale Supérieure
Assistant à la Sorbonne
Chargé de cours à l'Institut d'Optique

SOMMAIRE. — *L'auteur présente ci-dessous un travail relatif à l'étude de la répartition de la lumière dans les taches de diffraction en présence d'aberrations géométriques variées.*

*La première partie est relative au calcul approximatif des intensités lumineuses lorsque les différences de phase qui interviennent dans les intégrales de la diffraction à l'infini sont faibles. On établit une relation qui lie l'intensité lumineuse à l'écart quadratique moyen entre la surface d'onde et une sphère convenable, relation qui peut s'appliquer jusqu'à des intensités de l'ordre de la moitié de celle obtenue au centre de la tache d'Airy. On en déduit des tolérances relatives aux diverses aberrations, isolées ou superposées, et des règles de correction optimum de ces aberrations, en particulier dans le cas où les courbes représentant l'aberration sphérique longitudinale et l'écart à la condition des sinus sont « repliées ». **

La deuxième partie est relative à un intégrateur mécanique permettant de calculer les intégrales de la diffraction en présence d'aberrations géométriques quelconques. On transforme ces intégrales doubles en intégrales simples en décrivant sur la pupille circulaire une spirale d'Archimède de pas suffisamment réduit. Les divers termes d'aberrations (aberration sphérique, coma, astigmatisme) sont élaborés par des postes variés et les différences de phase correspondantes sont additionnées à l'aide d'un ruban d'acier dont le déplacement commande la rotation Ψ d'une manivelle. L'intégration de cos Ψ et sin Ψ, obtenue à l'aide de roulettes intégrantes se déplaçant suivant deux axes rectangulaires, fournit les composantes de l'amplitude vibratoire dans un petit volume entourant l'image paraxiale. La précision obtenue est pratiquement très suffisante ; l'auteur présente quelques exemples d'applications, en particulier l'étude d'un cas d'astigmatisme pur ($\pm$ 1,275 λ par rapport à la sphère centrée au milieu du segment qui joint les deux focales), et l'étude de l'influence d'un résidu d'aberration sphérique dans un objectif de microscope.

Dans la troisième partie on vérifie expérimentalement la répartition des éclairements dans certaines taches de diffraction pour légitimer l'application du principe de Huyghens Fresnel au calcul de ces phénomènes. On utilise la photométrie photographique en prenant des précautions convenables pour éliminer diverses erreurs ainsi que l'influence des dimensions du trou source. La tache d'Airy, deux cas de défauts de mise au point, un cas d'astigmatisme avec mises au point sur une focale et au milieu de l'intervalle des deux focales ont été étudiés et nous avons obtenu un accord satisfaisant entre les résultats expérimentaux et le calcul théorique (effectué à l'aide de l'intégrateur).

---

* On trouvera un premier exposé de ces résultats dans les Cahiers de Physique, cahier n° 26, déc. 1944 et aux C. R. Ac. Sc., 14 et 28 février 1944.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

1. L'étude des aberrations géométriques d'un instrument d'optique ne suffit pas à déterminer la répartition des éclairements dans l'image d'un point lumineux. On doit faire intervenir la théorie de la diffraction qui permet de calculer, sous forme d'intégrales doubles, les composantes de l'amplitude vibratoire en chaque point de la tache-image. De nouvelles intégrations permettent ensuite d'étudier le cas d'un objet de forme quelconque : droite lumineuse, ensemble de droites parallèles, mires de formes variées, et de déterminer le pouvoir séparateur de l'instrument.

Lord Rayleigh a étudié l'influence de diverses aberrations résiduelles sur la qualité de l'image monochromatique fournie par un appareil dispersif, ce qui l'a conduit à énoncer la règle bien connue du « quart de longueur d'onde » (voir paragraphe 2). Après lui, de nombreux auteurs (Conrady, Buxton, Martin, Steward, Picht, Born, Zernike, Nijboer (1), Françon [7], et Lansraux [8] ont poursuivi des calculs pour des aberrations variées ; certains utilisent des développements en séries de fonctions, d'autres procèdent par intégrations numériques ; les calculs sont longs et n'ont été pratiquement appliqués qu'à des aberrations isolées (principalement à l'aberration sphérique) dans le cas où ces aberrations sont faibles. Le cas général, où les termes d'aberration sphérique, de coma, d'astigmatisme se superposent dans des proportions variables avec la position de l'image dans le champ de l'instrument, n'a pas été traité jusqu'ici.

Nous nous sommes proposé de trouver un moyen de calculer les intégrales doubles dans le cas d'aberrations quelconques et de vérifier quelques-uns des résultats obtenus. Notre contribution à l'étude de ce problème porte sur les points qui suivent :

1) Nous montrerons qu'en présence de faibles aberrations géométriques l'éclairement obtenu au centre de la tache de diffraction est lié à l'écart quadratique moyen entre la surface d'onde et une sphère convenable par une relation plus précise que celle indiquée antérieurement. Nous appliquerons cette relation à l'étude des variations d'éclairement au voisinage du foyer de l'onde, puis nous rechercherons des règles de correction et des tolérances relatives aux diverses aberrations géométriques, isolées ou superposées.

2) Afin de traiter le cas général, nous avons construit un intégrateur mécanique permettant d'étudier des aberrations variées lorsque chacun des termes correspond à un chemin optique inférieur à 10 λ. Cet appareil permettra au calculateur opticien de connaître la qualité d'un système optique avant de le construire, de

---

(1) On trouvera un exposé historique très complet dans Nijboer, thèse [6].

tolérer certaines aberrations résiduelles, sans affecter sensiblement la tache de diffraction, ou de procéder à des retouches en vue d'obtenir une meilleure concentration de la lumière.

3) Nous avons enfin procédé à des vérifications expérimentales ; très peu de résultats ont été publiés à ce sujet et aucune étude quantitative directe de la tache de diffraction relative à l'image d'un point n'a été entreprise. Des expériences de photométrie photographique nous ont permis de vérifier convenablement les résultats obtenus par le calcul et la légitimité de l'application du principe de Huyghens-Fresnel au calcul des phénomènes de diffraction, dans les conditions expérimentales où nous nous sommes placé. Ceci constitue la troisième partie du présent travail.

PREMIÈRE PARTIE

INFLUENCE DE FAIBLES ABERRATIONS GÉOMÉTRIQUES SUR LE MAXIMUM CENTRAL DE LA TACHE DE DIFFRACTION RÈGLES DE CORRECTION - TOLÉRANCES

2. Lord Rayleigh a montré que la qualité d'un instrument d'optique n'est pas sensiblement affectée tant que la surface d'onde obtenue dans l'espace image reste comprise entre deux sphères concentriques, distantes de 1/4 de longueur d'onde.

Conrady et ses élèves ont poursuivi l'application de ces résultats à la recherche de tolérances relatives à diverses aberrations des systèmes centrés. Ils ont trouvé, comme Rayleigh, que l'éclairement obtenu au centre de la tache de diffraction varie autour d'une valeur moyenne égale à 0,8 (en prenant pour unité l'éclairement au centre de la tache d'Airy).

Ceci a suggéré à divers auteurs la recherche d'une relation approximative entre l'éclairement au centre de la tache de diffraction et la déformation de la surface d'onde. Nous proposons ci-dessous une relation assez précise, que nous utiliserons ensuite pour établir une règle de correction des aberrations. Nous étudierons auparavant l'influence de l'éclairement au centre de la tache de diffraction sur le contraste des images instrumentales.

I. Influence de l'éclairement au centre de la tache de diffraction sur la qualité des images optiques.

3. Quel que soit le récepteur utilisé, l'amélioration de la qualité des images est toujours liée à l'augmentation de leur contraste γ défini, ainsi qu'on le sait, comme le quotient $\frac{B-b}{B}$, B et b étant les brillances des plages claire et sombre ; la perception de fins détails n'est d'ailleurs obtenue qu'au delà d'un contraste minimum au-dessous duquel le récepteur ne peut déceler leur présence. Soit γ_0 le contraste de l'objet et γ_i le contraste de l'image lorsque γ_0 est égal à l'unité ; γ est une fonction manifestement croissante des deux variables γ_0 et γ_i [1] ; nous nous bornerons à étudier les variations de γ_i en utilisant la méthode de Ch. André [2], dont nous allons rappeler le principe :

La répartition des éclairements dans l'image d'un point peut être représentée par un « solide de diffraction » que l'on construit en portant normalement au plan yOz de l'image une longueur x proportionnelle à l'éclairement.

Soit : $x = f(y, z)$ l'équation de ce solide, C le contour de l'image géométrique de l'objet, dont nous supposerons la brillance uniforme (fig. 1) ; l'éclairement pro-

duit en un point A, de coordonnées y, z, par un élément de l'image C, de coordonnées y', z' et d'aire $dy'\,dz'$ est $f(y - y', z - z')\,dy'\,dz'$ et si les points de la source émettent des vibrations incohérentes, l'éclairement total s'exprime par l'intégrale double :

$$\iint_C f(y - y', z - z')\,dy'\,dz'.$$

Construisons dans les axes $A x_1 y_1 z_1$ le solide limité par la surface $x_1 = f(-y_1, -z_1)$ (que l'on peut obtenir en imprimant au solide précédent une rotation de 180°) ; l'éclairement obtenu en A est alors égal au volume découpé dans ce nouveau solide

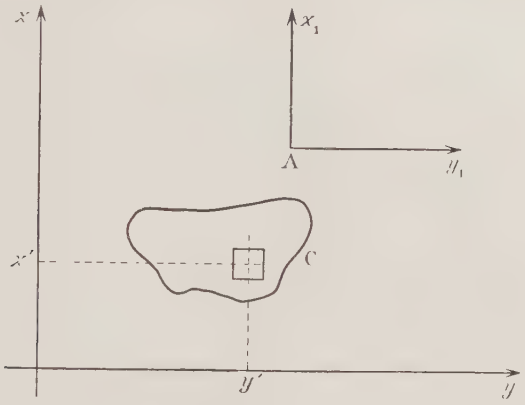

Fig. 1.

par le cylindre à génératrices parallèles à Ox et s'appuyant sur le contour de C.

En résumé, pour connaître l'éclairement en un point du plan image il suffit d'y placer le solide de diffraction : l'éclairement est proportionnel au volume de la portion de ce solide contenue à l'intérieur du contour de l'image théorique (théorème de réciprocité de Ch. André).

Nous allons montrer, à l'aide de quelques exemples courants, qu'il y a intérêt à ce que le maximum central du solide de diffraction soit aussi élevé que possible (résultat que l'on peut obtenir par une correction convenable des aberrations géométriques).

1° *Perception d'un point* : ce point sera en fait une tache de petites dimensions et la répartition des éclairements sera sensiblement représentée par le solide de diffraction. Le flux total réparti dans la tache image étant constant, le contraste est d'autant plus grand que le maximum central est plus élevé.

2° *Perception d'un fil* : en appliquant le théorème de réciprocité, on voit que l'éclairement obtenu au milieu de l'image géométrique du fil est égal au volume de la portion du solide d'André comprise entre deux plans verticaux dont la distance est égale à la largeur de l'image du fil (fig. 2). Ce volume étant propor-

tionnel à la surface de la section du solide de diffraction par un plan vertical, on cherchera à rendre cette surface maximum. Montrons que cette surface est station-

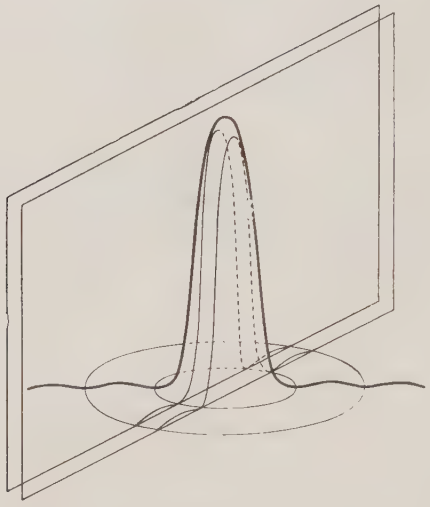

Fig. 2.

naire lorsque les aberrations sont nulles : soit S la surface d'onde sphérique de rayon R, limitée à un contour circulaire, C son centre, C x y z des axes rectangulaires tels que Cx passe par le pôle de S (fig. 3).

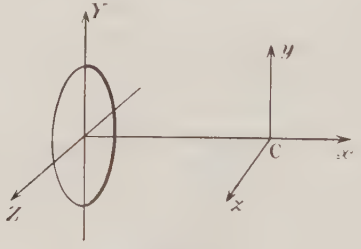

Fig. 3.

On sait que l'éclairement en un point de l'axe Cy s'exprime par la relation :

$$e = \left| \iint e^{\,i\,\frac{2\pi y Y}{\lambda R}}\, d\omega \right|^2,$$

où $d\omega$ est la quantité $d\sigma / \int\int d\sigma$ ($d\sigma$ étant l'élément d'aire de S). La surface de section du solide de diffraction est égale à $\int e\, dy$ et si l'on déforme légèrement la surface d'onde (la petite déformation étant égale à $\Delta(Y, Z)$), on aura pour variation de la surface :

$$\delta \int_{-\infty}^{+\infty} e\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta e\, dy.$$

En appelant Ψ la différence de phase $\frac{2\pi}{\lambda}\frac{y\ Y}{R}$, $\delta\Psi$ sa variation due à la déformation de la surface d'onde, A l'amplitude vibratoire $\iint e^{i\Psi}\,d\omega$, on aura :

$$\delta e = \delta\left[\iint e^{i\Psi}\,d\omega \iint e^{-i\Psi}\,d\omega\right] = i\left[\iint e^{i\Psi}\,\delta\Psi\,d\omega \iint e^{-i\Psi}\,d\omega - \iint e^{i\Psi}\,d\omega \iint e^{-i\Psi}\,\delta\Psi\,d\omega\right].$$

Cette expression change de signe avec y ; il en résulte que $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta e\,dy = 0$: la surface de section du solide de diffraction est donc bien stationnaire lorsque les aberrations sont nulles ; on peut constater sur quelques exemples courants qu'elle est pratiquement maximum. La perception d'un fil sera d'autant meilleure que les aberrations seront plus réduites. Remarquons cependant qu'il n'est pas équivalent du point de vue mathématique d'écrire que la surface de section du solide de diffraction est maximum, ou que l'éclairement central est maximum, lorsqu'on cherche à corriger au mieux une aberration déterminée, sans pouvoir la supprimer parfaitement ; il est possible que les solutions obtenues dans les deux cas soient légèrement différentes (voir par exemple le problème de la correction de l'aberration sphérique, § 12).

3° *Perception du contour d'une plage lumineuse* : à grande distance du contour l'éclairement est indépendant de la forme du solide de diffraction, mais on aura intérêt à ce que sa variation au voisinage du contour soit aussi rapide que possible. La dérivée de cet éclairement par rapport à un déplacement perpendiculaire au contour étant sensiblement égale à la surface de la section du solide d'André par un plan vertical tangent au contour de l'image, on est ramené au problème du 2°.

On voit que l'on obtiendra une amélioration de la qualité de l'image en augmentant la valeur de l'éclairement au centre de la tache de diffraction, ce qui revient à y concentrer l'énergie au maximum.

II. Calcul de l'éclairement au centre de la tache de diffraction en présence de faibles aberrations géométriques.

A) *Définitions. Relations préliminaires* :

4. Soit Σ une portion de surface d'onde, limitée à un contour Γ ; nous la supposerons assez voisine d'une sphère S, de centre C, de rayon R (fig. 4) ; si M est un point de Σ, MC coupe S en I ; nous poserons (le sens positif étant celui de la propagation de la lumière) :

$$\overline{IM} = \Delta \qquad \overline{IC} = R \qquad \overline{MC} = D \qquad \Psi = 2\pi\Delta/\lambda.$$

La valeur moyenne du carré de l'écart entre Σ et S (c'est-à-dire le carré de l'écart quadratique moyen) est :

$$E = \int\int_{\Sigma} \Delta^2 \, d\omega$$

en posant :

$$d\omega = d\sigma \Big/ \int\int_{\Sigma} d\sigma \qquad (d\sigma \text{ est l'élément d'aire de } \Sigma).$$

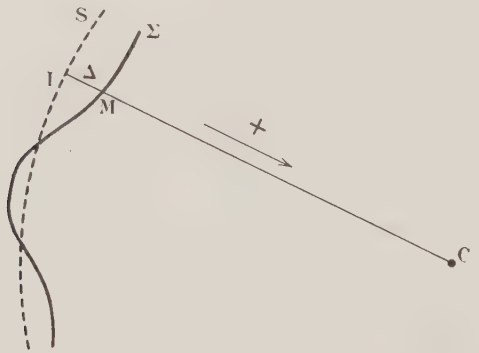

Fig. 4.

La surface d'onde étant donnée à priori, on peut se donner ensuite le point C : le carré moyen E ne dépend plus que du rayon R de la sphère de référence et il s'exprime par :

$$E = \int\int (R - D)^2 \, d\omega = R^2 - 2R \int\int D \, d\omega + \int\int D^2 \, d\omega.$$

Ce trinôme en R admet un minimum E_0 lorsque $R = R_0 = \int\int D d\omega$. On a :

$$E_0 = \left(\int\int D \, d\omega\right)^2 - 2\left(\int\int D \, d\omega\right)^2 + \int\int D^2 \, d\omega$$

$$(1) \qquad E_0 = \boxed{\int\int D^2 \, d\omega - \left(\int\int D \, d\omega\right)^2}$$

Remarquons maintenant que R_0 est la valeur moyenne de la distance D d'un point de la surface d'onde au point C ; pour cette raison la sphère de rayon R_0 sera appelée *sphère moyenne de centre* C. On peut d'ailleurs écrire :

$$0 = R_0 - \int\int D \, d\omega = \int\int (R_0 - D) \, d\omega,$$

ce qui exprime que si $\Delta = R_0 - D$ est petit devant R_0, le volume total compris entre la surface d'onde et la sphère moyenne est également réparti de part et d'autre de cette sphère.

On peut aussi exprimer E_0 en fonction de l'écart par rapport à une sphère de

rayon R quelconque ; les calculs sont évidemment identiques aux précédents, D étant remplacé par Δ ; on aboutit à l'expression :

(1 *bis*) $$\boxed{E_0 = \iint \Delta^2 \, d\omega - \left(\iint \Delta \, d\omega\right)^2}$$

E_0 n'est donc fonction que des coordonnées de C : nous allons établir, sous certaines conditions, une relation entre E_0 et l'éclairement obtenu au point C.

B) *Calcul de l'éclairement en* C :

5. Prenons pour unité l'éclairement obtenu au centre de la tache de diffraction lorsque la surface est parfaitement sphérique ; nous aurons, pour expression de l'éclairement e en présece d'aberrations quelconques, Ψ étant la différence de phase $\Psi = 2\pi \frac{\Delta}{\lambda}$:

$$e = \left(\iint \cos \Psi \, d\omega\right)^2 + \left(\iint \sin \Psi \, d\omega\right)^2 > \left(\iint \cos \Psi \, d\omega\right)^2.$$

Prenons la sphère moyenne comme sphère de référence et supposons que cos Ψ reste toujours positif, c'est-à-dire $|\Psi| \leqslant \pi/2$, ou encore $|\Delta| \leqslant \lambda/4$ (cette condition est 2 fois moins sévère que la règle de Lord Rayleigh, puisque la surface d'onde peut s'écarter de $\lambda/4$ *de part et d'autre* de la sphère moyenne) ; nous aurons :

$$e \geqslant \left(\int\int \cos \Psi \, d\omega\right)^2 \geqslant \left[\iint \left(1 - \frac{\Psi^2}{2}\right) d\omega\right]^2 = \left[1 - \iint \frac{\Psi^2}{2} \, d\omega\right]^2 =$$

$$= \left[1 - \frac{2\pi^2}{\lambda^2} \iint \Delta^2 \, d\omega\right]^2,$$

c'est-à-dire :

(2) $$\boxed{e > \left[1 - \frac{2\pi^2}{\lambda^2} E_0\right]^2}$$

On peut ainsi calculer une limite inférieure de l'éclairement en un point à l'aide du carré moyen de l'écart entre la surface d'onde et la sphère moyenne centrée en ce point (²).

Evaluons le degré d'approximation obtenu : le développement en série de e par rapport aux puissances croissantes de Ψ ne renferme que les puissances paires de Ψ ; l'expression précédente contient les termes de degré 0 et 2 et une

---

(²) Divers auteurs (Strehl, Vaïsala]9], Wang Ta Hang [10], Nijboer [6]) ont déjà utilisé a relation plus simple $e \simeq 1 - \frac{4\pi^2}{\lambda^2} E_0$, mais la précision obtenue à l'aide de la relation (2) est supérieure à celle qu'ont obtenue ces auteurs, comme on peut le constater sur la figure 5, où l'on a porté en fonction de l'éclairement e l'erreur $e - e'$ ou $e - e''$ que l'on commet en utilisant l'une ou l'autre des relations dans quelques cas connus.

partie des termes en Ψ^4, l'erreur est donc de l'ordre de Ψ^4. On peut figurer en coordonnées rectangulaires l'ensemble des résultats obtenus dans la suite de ce travail ; en portant en abscisses les éclairements qui résultent d'intégrations numériques effectuées par Conrady et ses élèves ou par nous-même à l'aide de

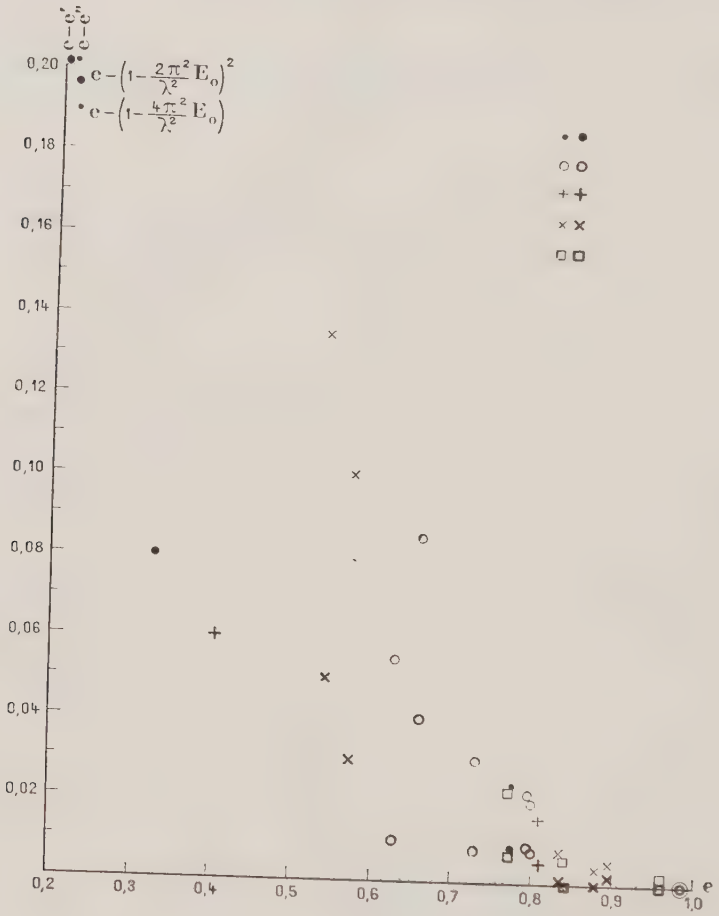

Fig. 5.

l'intégrateur, en ordonnées la quantité $e-\left(1-\frac{2\pi^2}{\lambda^2}E_o\right)^2$ (fig. 5), on constate que l'approximation effectuée est satisfaisante tant que l'éclairement reste assez fort ; la précision dépasse 1 % si l'éclairement est supérieur à 0,75 environ ; elle diminue ensuite assez rapidement, mais la relation (2) peut encore donner des indications utiles pour des éclairements de l'ordre de 0,5.

Remarque. On a admis que l'énergie était uniformément répartie sur la surface d'onde ; cette hypothèse peut être insuffisante lorsque les angles d'ouverture

sont grands ; il faudrait alors faire intervenir les variations de la brillance de l'objet, du rapport de convergence $n \sin u / n' \sin u'$, du facteur de transmission de l'appareil en fonction de u ou u', de l'état de polarisation de la lumière, etc. Nous reviendrons dans la Deuxième Partie sur cette question.

III. Application de la relation précédente à l'étude des variations d'éclairement au voisinage du foyer.

6. Nous appellerons *foyer* d'une onde le point de l'espace où l'éclairement est maximum ; on peut le déterminer, si la surface d'onde n'est pas trop aberrante, en cherchant le point où E_0 est minimum.

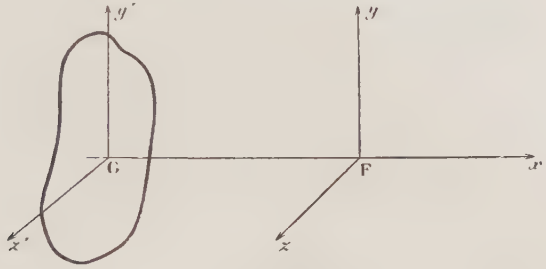

Fig. 6.

Nous allons étudier les variations d'éclairement lorsqu'on se déplace dans un petit volume entourant le foyer ; nous choisirons pour cela un trièdre de référence $Fxyz$, l'axe Fx passant par le centre de gravité G de l'onde (fig. 6) ; si p est l'une quelconque des 3 coordonnées x, y, z nous aurons au point F :

$$\frac{\partial e}{\partial p} = 0 \qquad \frac{\partial^2 e}{\partial p^2} = -\frac{4\pi^2}{\lambda^2}\sqrt{e}\,\frac{\partial^2 E_0}{\partial p^2}.$$

On tire d'autre part de l'équation (1) :

$$\frac{\partial^2 E_0}{\partial p^2} = 2\left[\int\int\left(\frac{\partial D}{\partial p}\right)^2 d\omega + \int\int D\,\frac{\partial^2 D}{\partial p^2}\,d\omega - \left(\int\int\frac{\partial D}{\partial p}\,d\omega\right)^2 - \right.$$
$$\left. - \int\int D\,d\omega \int\int \frac{\partial^2 D}{\partial p^2}\,d\omega\right].$$

On peut expliciter cette relation : si X, Y, Z sont les coordonnées d'un point de la surface d'onde, on a :

$$\frac{\partial D}{\partial x} = -\frac{X}{D} \qquad \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} = \frac{1}{D}\left[1 - \frac{X^2}{D^2}\right]$$

et des expressions analogues pour les variables y et z.

A) *Latitude de mise au point.*

7. Etudions comment varie l'éclairement lorsqu'on se déplace le long de l'axe Ox. Si u' est l'angle d'un rayon lumineux dans l'espace image avec Ox, on obtient l'expression :

$$\frac{\partial^2 e}{\partial x^2} = -\frac{8\pi^2}{\lambda^2}\sqrt{e}\left[\int\int \cos^2 u'\, d\omega - \left(\int\int \cos u'\, d\omega\right)^2\right].$$

La latitude de mise au point dépend de l'ouverture et de la forme du faisceau ; elle est proportionnelle à la racine carrée de l'éclairement obtenu au foyer, mais elle ne dépend pas de la nature *des aberrations géométriques.*

Pratiquement, si les aberrations sont faibles, $\sqrt{e}$ est voisin de 1 et la latitude de mise au point n'est pas influencée par les aberrations ; c'est le résultat qu'ont trouvé MMrs Arnulf et Perrin au cours de recherches sur la latitude de mise au point dans le microscope : celle-ci était sensiblement la même pour un bon objectif et pour un objectif mal corrigé.

Dans le cas d'une onde à contour circulaire, si α' est l'angle d'ouverture maximum, on aura :

$$\frac{\partial^2 e}{\partial x^2} = -\frac{2\pi^2}{3\lambda^2}\sqrt{e}\left[1 - \cos\alpha'\right]^2.$$

Nous verrons au paragraphe 10 l'expression de la latitude de mise au point, déduite de la règle formulée au paragraphe 9.

B) *Etude du solide de diffraction au voisinage de son maximum* :

8. Cherchons maintenant les variations d'éclairement au voisinage du foyer lorsqu'on se déplace dans le plan de front $y\,F\,z$: nous aurons :

$$\frac{\partial^2 E_0}{\partial y^2} = 2\left[\int\int \frac{Y^2}{D^2}\, d\omega - \left(\int\int \frac{Y}{D}\, d\omega\right)^2\right],$$

mais puisque l'axe Fx passe par le centre de gravité G de la surface d'onde, nous avons $\int\int Y d\omega = 0$; si les aberrations sont assez faibles, nous pouvons considérer que D est sensiblement constant au cours de l'intégration ; il en résulte

$$\int\int \frac{Y}{D}\, d\omega = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 E_0}{\partial y^2} = 2\int\int \frac{Y^2}{D^2}\, d\omega \simeq \frac{2}{R_0^2}\int\int Y^2 d\omega,$$

ce qui donne :

$$\frac{\partial^2 e}{\partial y^2} = -\frac{8\pi^2\sqrt{e}}{\lambda^2 R_0^2}\int\int Y^2 d\omega.$$

La courbure du solide de diffraction dans la direction Fy *est proportionnelle au moment d'inertie de la surface d'onde par rapport au plan* Gxz' *passant par son centre de gravité* (*fig.* 6). *La forme de ce solide ne dépend pas de la nature des aberrations, mais les courbures sont proportionnelles à* $\sqrt{e}$.

Remarque : l'ouverture du faisceau est petite et l'on peut prendre indifféremment

le moment d'inertie par rapport au plan Gxz' ou par *rapport à l'axe* Gz' ; *on en conclut que les directions des lignes de courbure du solide de diffraction en son maximum sont parallèles aux moments d'inertie principaux de la surface d'onde et les courbures principales sont proportionnelles aux moments principaux d'inertie.*

Vérification numérique : Dans l'objectif de l'héliomètre de Koenigsberg la surface d'onde est un demi-cercle, dont le rapport des moments principaux d'inertie est égal à : $1 - 64/9\pi^2 = 0{,}280$, alors que le rapport des variations d'éclairement, lorsque l'on s'éloigne d'une même quantité à partir de F (égal au rapport des courbures) est égal, d'après Straubel [3], à : 0,284. L'accord est satisfaisant.

IV. Application à la recherche de tolérances pour les diverses aberrations géométriques.

A) *Expression générale de la tolérance* :

9. La règle de Lord Rayleigh conduit à des valeurs de l'éclairement au centre de la tache de diffraction qui varient de 0,73 (aberration sphérique repliée) à 0,87 (coma du 3e ordre) ; le résultat obtenu est donc assez variable. La relation (2)

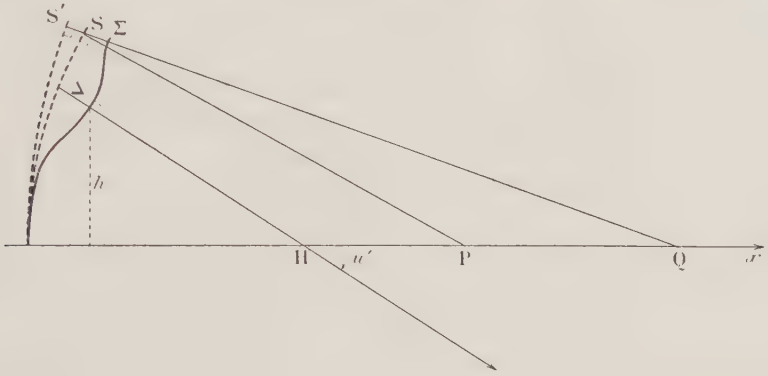

Fig. 7.

va nous permettre d'écrire à priori $e = 0{,}80$, ce qui équivaut sensiblement, à $E_0 = \lambda^2/180$.

Nous admettrons qu'un instrument est bien corrigé si le carré moyen de l'écart entre la surface d'onde et la sphère focale moyenne ne dépasse pas $\lambda^2/180$ (*ou encore si l'écart quadratique moyen reste inférieur à* $\lambda/\sqrt{180}$) [3].

Appliquons ceci aux diverses aberrations :

B) *Aberration de sphéricité (et latitude de mise au point).*

---

[3] Les résultats obtenus par Mr Françon dans sa thèse (*Revue d'Optique*, 26 (1947), numéro d'octobre) ont montré que la précédente règle est parfois trop sévère, parfois insuffisante, suivant que l'objet a un fort ou un faible contraste. Il faudra donc adapter la règle de correction à la nature du récepteur et au contraste de l'objet.

10. Soit P le foyer paraxial, H l'intersection d'un rayon lumineux issu de la zone de rayon h avec Px (fig. 7). L'aberration longitudinale est $l = \mathrm{PH}$ et l'écart de la surface d'onde par rapport à la sphère S centrée en P satisfait à la relation $l = -\frac{R^2}{h}\frac{d\Delta}{dh}$, alors que l'écart Δ' par rapport à la sphère S' centrée en un point Q tel que $\mathrm{PQ} = \delta x$ est égal (voir l'Appendice *) à :

$$\Delta' = \Delta + \frac{h^2}{2}\frac{\delta x}{R^2}.$$

Nous poserons : $\rho = \frac{h^2}{h_m^2}$, ces relations deviennent (u' étant l'angle d'un rayon lumineux avec l'axe et α' la valeur maximum) :

(3)
$$\boxed{\begin{array}{c} l = -\frac{2}{\alpha'^2}\frac{d\Delta}{d\rho} \\ \Delta' = \Delta + \frac{\alpha'^2}{2}\rho\,\delta x \end{array}}$$

Application à la recherche de la latitude de mise au point.

Faisons dans ces résultats $\Delta = 0$, on trouve en remarquant que $d\omega = d\rho$ $E_0 = \alpha'^4 \delta x^2/48$, ce qui conduit sensiblement à la tolérance (identique à celle que l'on obtient par application de la règle de Lord Rayleigh) :

(4)
$$|\delta x| \leqslant 0{,}515\ \lambda/\alpha'^2 \qquad \boxed{\simeq \lambda/2\,\alpha'^2}$$

11. *Aberration de sphéricité du* 3e *ordre* : elle est de la forme $l = \rho L$, où L est l'aberration longitudinale maximum, ce qui conduit aux expressions :

$$\Delta' = -\frac{\alpha'^2}{4} L\rho^2 + \frac{\alpha'^2}{2}\rho\,\delta x, \qquad E_0 = \alpha'^4\left[\frac{\delta x^2 - L\,\delta x}{48} + \frac{L^2}{180}\right].$$

E_0 est minimum si $\delta x = L/2$ et l'application de la règle générale fournit la tolérance :

(5)
$$\boxed{|L| \leqslant \frac{4\lambda}{\alpha'^2}}$$

Le foyer de l'onde est situé au milieu de la nappe sagittale de la caustique et la longueur maximum de celle-ci est égale à $4\lambda/\alpha'^2$.

12. *Aberration de sphéricité* « corrigée ».

Lorsqu'on calcule un système optique, on laisse au terme d'aberration de sphéricité du 3e ordre une faible valeur, de façon que la courbe représentant l'aberra-

* Cet Appendice paraîtra prochainement à la *Revue d'Optique*.

tion longitudinale en fonction de h recoupe l'axe des h pour une valeur h_0 correspondant à une zone qu'on appelle zone de correction (fig. 8) ; on constate en faisant varier h_0 que le coefficient d'aberration du 5e ordre reste sensiblement constant ; on peut donc admettre que l'aberration est représentée par une équation de la forme : $l = a'\varphi\ (\varphi - \varphi_0)$ avec $\varphi_0 = {h_0}^2/{h_m}^2$; a' sera un coefficient caractéristique de l'aberration du 5e ordre.

Il faut obtenir le maximum d'éclairement au foyer de l'onde en faisant varier le paramètre φ_0, ce qui revient à déterminer la meilleure courbe parmi celles qui sont tracées sur la figure 9. On a :

$$\Delta' = \frac{\alpha'^2}{2}\left[a'\left(\frac{\varphi_0\varphi^2}{2} - \frac{\varphi^3}{3}\right) + \nu\,\delta x\right].$$

On trouve que E_0 est minimum par rapport à φ_0 et à δx si l'on a : $\varphi_0 = 1$ et $\delta x = -a'/5$.

Contrairement à la règle de Kerber (qui n'a d'ailleurs pas de signification physique), il y a lieu de corriger l'aberration de sphéricité pour la zone marginale des instruments d'optique. C'est ainsi que l'on obtiendra le maximum d'éclairement au foyer de l'onde.

Le calcul montre d'autre part qu'il suffit que h_0/h_m s'écarte de 0,08 de sa valeur optimum pour que l'éclairement focal tombe de 0,8 à 0,6 ; le choix de la zone de correction est donc très important et, bien que la condition $\varphi_0 = 1$ corresponde à un optimum, il y a lieu de ne pas s'en écarter notablement.

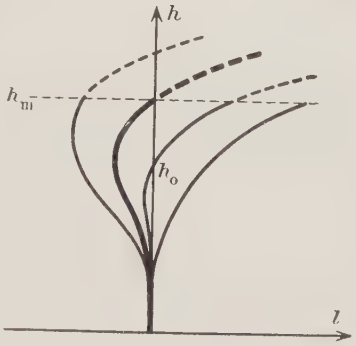

Fig. 8.

La relation $\delta x = -a'/5$ détermine la position du foyer : l'aberration longitudinale maximum étant égale à $L = -a'/4$, on aura : $\delta x = 4/5\ L$; le foyer F est donc situé aux 4/5 de la nappe sagittale de la caustique à partir du foyer paraxial, confondu avec le foyer marginal (fig. 9). La règle générale permet d'obtenir la tolérance [4] :

$$(6) \qquad \boxed{|L| = \left|\frac{a'}{4}\right| \leqslant \sqrt{35}\,\frac{\lambda}{\alpha'^2} \simeq 6\,\frac{\lambda}{\alpha'^2}}$$

Remarque. Nous avons pu constater à l'aide d'un exemple numérique traité par Conrady [5] que l'application de la règle de Lord Rayleigh ne permet pas de déterminer le meilleur foyer. Conrady a calculé l'éclairement au point Φ (situé

---

[4] Résultat obtenu par L. C. Martin [11] à l'aide d'intégrations numériques et par Wang Ta Hang à l'aide de la relation $e \simeq 1 - \frac{4\pi^2}{\lambda^2} E_0$.

[5] Nous avons rectifié une légère erreur dans ce calcul numérique.

aux 3/4 de la caustique) pour lequel la différence de marche est minimum (fig. 9) : dans le cas où celle-ci est égale à $\lambda/4$ l'éclairement est $e = 0{,}73$. Si l'on se place au contraire en F, où la différence de marche atteint $0{,}4\ \lambda$, on trouve que l'éclairement est 0,79. L'éclairement maximum est donc bien obtenu lorsque E_0 est minimum et non lorsque la différence de marche est minimum.

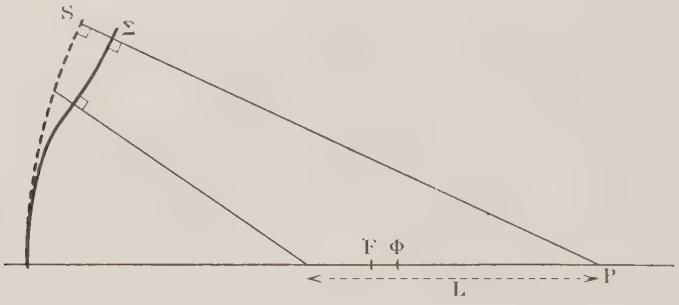

Fig. 9.

C) *Etude de la coma ; tolérance à l'égard de la condition des sinus.*

13. Considérons un instrument parfaitement stigmatique pour un couple de points A, A′ de son axe et soit B un point objet situé dans le plan de front passant

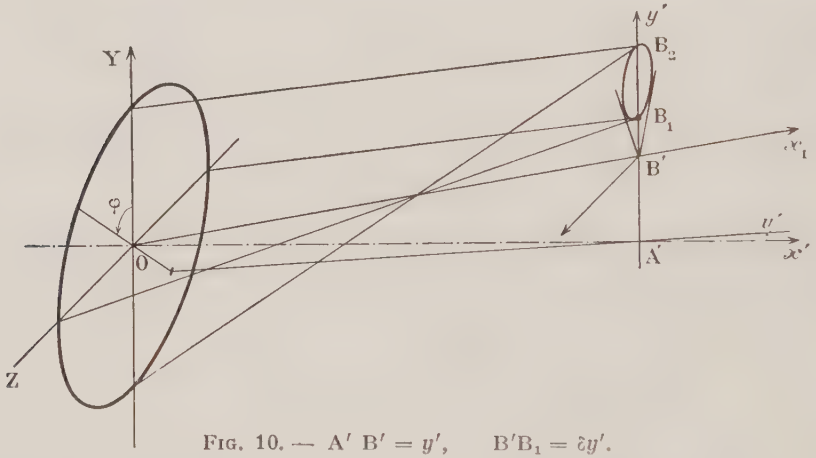

Fig. 10. — $A'B' = y'$, $B'B_1 = \delta y'$.

par A, à une petite distance $AB = y$ de A ; B′ est l'image de Gauss du point B. Les points de la pupille de sortie seront déterminés par les angles u' et φ (fig. 10) ; l'écart $\Delta\ (u', \varphi, y)$ que présente la surface d'onde par rapport à une sphère centrée au point B′ détermine les aberrations extra-axiales. Nous ne retiendrons dans le développement de Δ par rapport à y que les termes du 1er ordre en y, que nous appellerons termes de coma. Les intersections des rayons lumineux avec le plan

image subiront par rapport à B′ des déplacements corrélatifs, qui seront également du 1er ordre. En reprenant un raisonnement classique, on peut établir (voir l'Appendice) que si l'on néglige les infiniment petits du 2e ordre en y, on a :

$$\Delta = (n\, y \sin u - n'\, y' \sin u') \cos \varphi / n'.$$

La quantité entre crochets est proportionnelle à y (ou y') ; c'est une fonction impaire de u (ou de u') et la relation de Lagrange $n\, y\, u = n'\, y'\, u'$ indique qu'elle ne contient pas de termes du 1er ordre en u' ; nous écrirons son développement en série sous la forme :

$$ny \sin u - n'\, y' \sin u' = n'\, y' \,(b_3 \sin^3 u' + b_5 \sin^5 u' + \ldots),$$

les termes successifs représentant respectivement la coma du 3e, du 5e ordre, etc.

14. *Coma du* 3e *ordre* : L'écart Δ sera de la forme : $\Delta = b_3 y' u'^3 \cos \varphi$. En cherchant les intersections des rayons lumineux avec le plan $B'y'z'$, on retrouve la forme classique de la tache de coma du 3e ordre. Le cercle comatique relatif à la zone marginale a été tracé sur la figure 8 ; son point inférieur B_1 est situé à la distance $B'B_1 = \delta y' = b_3 y'\, \alpha'^2$ du point B′ et un calcul rapide permet de constater que si l'on définit un grandissement fictif par la relation $g = \dfrac{n \sin u}{n' \sin u'}$, on a $g = \dfrac{A'B_1}{y} = \dfrac{y' + \delta y'}{y}$.

Cherchons d'abord le foyer de l'onde : la symétrie de la figure indique qu'il est dans le plan $B'x_1\, y'$; l'écart de la surface d'onde par rapport à une sphère centrée au point de coordonnées ξ, η_1 (dans les axes B′ $x_1\, y'$) sera :

$$\Delta' = b_3 y'\, u'^3 \cos \varphi + \frac{u'^2}{2}\, \xi - u'\, \eta_1 \cos \varphi,$$

la quantité $\dfrac{2\pi}{\lambda}\, u' \eta_1$ étant égale au paramètre w, utilisé par de nombreux auteurs.

Nous aurons $\left(\text{avec } d\omega = \dfrac{1}{\pi\, \alpha'^2}\, u'\, du'\, d\varphi \right)$:

$$E_0 = \frac{b_3^2\, y'^2 \alpha'^6}{8} + \eta_1^2\, \frac{\alpha'^2}{4} - b_3\, y'\, \eta_1\, \frac{\alpha'^4}{3} + \xi^2\, \frac{\alpha'^4}{48} ;$$

les coordonnées du foyer sont $\xi = 0$, $\eta_1 = \dfrac{2}{3}\, b_3\, y'\, \alpha'^2$.

Le foyer de l'onde est aux 2/3 *du segment* $B'\, B_1$ *qui joint le foyer paraxial au point inférieur du cercle comatique.*

C'est le résultat trouvé par Conrady [4], Martin [5] et Nijboer [6] par des procédés différents. Nous aurons en F :

$$E_{0F} = \frac{(\alpha' \delta y')^2}{72},$$

ce qui conduit à la tolérance :

$$(7) \qquad \boxed{\frac{\delta g}{g} \leqslant \sqrt{\frac{2}{5}} \frac{\lambda}{y' \alpha'}}$$

Remarque : la règle de Lord Rayleigh n'est pas respectée si l'on applique cette tolérance : la différence de marche atteint en effet 0,42 λ. Inversement, la différence de marche passe par un minimum au point Φ situé aux 3/4 du segment $B'B_1$; si l'on applique la règle de Lord Rayleigh en ce point, on trouve $e = 0{,}87$.

15. *Coma « corrigée »*. Supposons maintenant que la condition des sinus soit satisfaite pour une ouverture u'_0 telle que $\left(\frac{u'_0}{\alpha'}\right)^2 = \varphi_0$; si l'on écrit $g = \frac{y'}{y}\left[1 + \frac{b'\varphi(\varphi - \varphi_0)}{\alpha'}\right]$, b' étant un coefficient caractéristique de la coma du 5e ordre, on aura :

$$\Delta' = (n\, y \sin u - n'\, y' \sin u') \frac{\cos \varphi}{n'} + \frac{u'^2}{2} \xi - u' \cos \varphi \qquad \eta =$$

$$= y' b' \varphi^{\frac{3}{2}} (\varphi - \varphi_0) \cos \varphi + \xi \frac{\alpha'^2}{2} \varphi - \eta\, \alpha' \varphi^{\frac{1}{2}} \cos \varphi$$

et le calcul montre que E_0 est minimum lorsque $\varphi_0 = 6/5$.

On doit donc corriger les instruments d'optique de la condition des sinus pour une zone de rayon h_0 telle que $h_0/h_m = \sqrt{1,2} \sim 1{,}1$ (en l'absence d'aberration sphérique ou lorsque la pupille est à l'infini).

Cette condition est relativement sévère : il suffit de s'écarter de 10 % de la valeur indiquée pour que l'éclairement focal tombe de 0,8 à 0,6. Le choix de la zone de correction est donc très important pour la condition des sinus, comme pour l'aberration sphérique.

L'écart maximum δg_M est obtenu lorsque $\varphi = \frac{\varphi_0}{2}$ et l'on peut formuler la tolérance :

$$(8) \qquad \frac{\delta g_M}{g} \leqslant \frac{3\sqrt{60}}{25} \frac{\lambda}{y' \alpha'} \simeq \boxed{0{,}95 \frac{\lambda}{y' \alpha'}}$$

Remarque. — En présence d'aberration sphérique les coefficients de coma doivent être modifiés (voir l'Appendice), ainsi que l'ont indiqué divers auteurs.

D) *Astigmatisme et courbure de champ.*

16. Si t et s sont les abscisses des focales par rapport à un point choisi sur le rayon moyen du pinceau, nous aurons pour écart de la surface d'onde par rapport à une sphère centrée à l'origine (la focale sagittale est parallèle à Oy) :

$$\Delta = -\frac{u'^2}{2}(s\sin^2\varphi + t\cos^2\varphi) = -\frac{u'^2}{2}\left(\frac{t+s}{2} + \frac{t-s}{2}\cos 2\varphi\right).$$

On trouve :

$$E_0 = \frac{\alpha'^4}{192}\left[(t+s)^2 + 2(t-s)^2\right]$$

et la tolérance sur l'ensemble de l'astigmatisme et de la courbure de champ s'écrit :

$$(9) \qquad \boxed{(t+s)^2 + 2(t-s)^2 \leqslant \frac{16}{15}\frac{\lambda^2}{\alpha'^4} \backsim \frac{\lambda^2}{\alpha'^4}}$$

Si la courbure de champ est nulle, on aura pour tolérance sur l'astigmatisme seul :

$$(10) \qquad \boxed{|t-s| < \lambda/\sqrt{2}\,\alpha'^2}$$

(cette tolérance est un peu moins sévère que la règle de Lord Rayleigh, qui conduirait à $|t-s| \leqslant \lambda/2\,\alpha'^2$).

E) *Superposition des diverses aberrations précédentes.*

17. Nous appellerons a le coefficient d'aberration sphérique du 3e ordre
a' — — — 5e —
b — de coma du 3e ordre
b' — 5e
t, s, les abscisses des focales
ξ, η les coordonnées d'un point par rapport au foyer paraxial B',

les autres quantités ayant les mêmes significations qu'auparavant, $l = -a\rho + a'\rho^2$ étant l'aberration sphérique longitudinale, on trouve :

$$\Delta = \frac{\alpha'^2}{2}\left[\left(\xi - \frac{t+s}{2}\right)\rho + \frac{a\rho^2}{2} - a'\frac{\rho^3}{3}\right] + \\ + \left[b\,y'\rho^{\frac{3}{2}} + b'y'\rho^{\frac{5}{2}} - \alpha'\eta\,\rho^{\frac{1}{2}}\right]\cos\varphi - \frac{\alpha'^2}{4}(t-s)\rho\cos 2\varphi$$

et les coordonnées du foyer F sont :

$$\begin{cases} \xi = \dfrac{t+s}{2} + \dfrac{3\,a'}{10} - \dfrac{a}{2}, \\ \eta = \dfrac{y'}{\alpha'}\left[\dfrac{2}{3}\,b + \dfrac{b'}{2}\right]. \end{cases}$$

Ces coordonnées sont donc égales à la somme des divers termes relatifs aux différentes aberrations : les déplacements sont additifs.

Si maintenant on calcule le carré moyen de l'écart Δ_F entre Σ et la sphère moyenne centrée en F, on trouve qu'il est égal à la somme des carrés moyens relatifs aux aberrations de sphéricité, de coma, d'astigmatisme et de courbure de champ. Nous dirons alors que ces quatre aberrations sont *indépendantes*. On constate d'ailleurs que les divers termes d'aberration de sphéricité ne sont pas indépendants, non plus que les termes de coma.

Nous pouvons maintenant formuler une règle de correction générale : Si L est la valeur de l'aberration longitudinale de sphéricité, L_m la valeur maximum de cette aberration lorsqu'elle est seule, δg, δg_m, $c = \frac{t+s}{2} c_m$, $d = t - s$, d_m les quantités correspondantes pour la coma, la courbure de champ et l'astigmatisme, on peut mettre la tolérance sous la forme :

$$(11) \qquad \boxed{\left(\frac{L}{L_m}\right)^2 + \left(\frac{\delta g}{\delta g_m}\right)^2 + \left(\frac{c}{c_m}\right)^2 + \left(\frac{d}{d_m}\right)^2 \leqslant 1}$$

formule qui permettra de voir rapidement si l'instrument satisfait à la règle $E_o < \lambda^2/180$ en un point quelconque de son champ, à condition de connaître les valeurs des diverses aberrations en ce point. Cette formule a pu être contrôlée à l'aide de notre Intégrateur (voir Deuxième Partie).

On peut comparer les tolérances précédentes à celles que l'on obtiendrait en écrivant que la diffusion géométrique reste inférieure aux dimensions du premier anneau noir de la tache d'Airy ; ce raisonnement grossier conduirait à des tolérances généralement trop sévères.

F) *Cas général : superposition d'aberrations quelconques relatives à un système centré.*

18. Il est commode d'utiliser la classification proposée par Nijboer [6], qui consiste à développer en série de Fourier le chemin optique aberrant relatif au foyer paraxial, suivant les lignes trigonométriques de l'arc $m\varphi$; pour des raisons de symétrie, il n'apparaît d'ailleurs que des termes de la forme

$$y'^{2p+m} h'^{2q+m} \cos m\varphi,$$

où h est le rayon vecteur sur la pupille de sortie et où p, q, m sont des nombres entiers (ou nuls).

Lorsque $m = 0$ on obtient la sphéricité et la courbure de champ,
$m = 1$ — la coma et la distorsion,
$m = 2$ — l'astigmatisme,
$m \geqslant 3$ — des aberrations qui n'apparaissent qu'à partir du 5e ordre.

On peut rechercher à quelle condition deux aberrations représentées par deux termes quelconques du tableau de Nijboer sont indépendantes.

Remarquons d'abord que E_o est une forme quadratique par rapport aux divers coefficients d'aberration ; il n'y a donc pas de termes contenant trois coefficients et, pour rechercher s'il y a indépendance entre deux termes, on peut supposer les autres nuls. On aboutit aux résultats suivants : deux termes d'aberration sont indépendants s'ils appartiennent à deux colonnes différentes du tableau de Nijboer (c'est-à-dire s'ils correspondent à des valeurs différentes du paramètre m). De plus, dans la 1re colonne les termes de courbure de champ sont indépendants des termes d'aberration sphérique ; dans la 2e, les termes de coma sont indépendants des termes de distorsion.

Tableau récapitulatif des diverses tolérances

	tolérance linéaire	tolérance en proximité par rapport à la pupille de sortie, de rayon h
1) latitude de mise au point	$\lambda/2\,\alpha'^2$	$\lambda/2\,h^2$
2) aberration sphérique *a*) 3e ordre *b*) corrigée pour $h_o/h_m = 1 \pm 0{,}04$	 $4\,\lambda/\alpha'^2$ $6\,\lambda/\alpha'^2$	 $4\,\lambda/h^2$ $6\,\lambda/h^2$
3) coma — condition des sinus *a*) coma du 3e ordre	$\left\lvert\frac{\delta g}{g}\right\rvert \leqslant 0{,}63\ \frac{\lambda}{y'\alpha'}$	$\left\lvert\frac{\delta g}{g}\right\rvert \leqslant 0{,}63\ \frac{\lambda}{h\theta'}$
b) corrigée pour $\frac{h_o}{h_m} = 1{,}1 \pm 0{,}05$	$\left\lvert\frac{\delta g_m}{g}\right\rvert \leqslant 0{,}93\ \frac{\lambda}{y'\alpha'}$	$\left\lvert\frac{\delta g^m}{g}\right\rvert \leqslant 0{,}93\ \frac{\lambda}{h\theta'}$
4) astigmatisme et courbure de champ	$(t+s)^2 + 2\,(t-s)^2 \leqslant \frac{\lambda^2}{\alpha'^4}$	$\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{s}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{s}\right)^2 \leqslant \frac{\lambda^2}{h^4}$
astigmatisme seul	$\lvert t-s\rvert \leqslant \frac{\lambda}{\sqrt{2}\,\alpha'^2}$	$\left\lvert\frac{1}{t}-\frac{1}{s}\right\rvert \leqslant \frac{\lambda}{\sqrt{2}\,h^2}$

5) superposition des diverses aberrations :

$$\left(\frac{L}{L_m}\right)^2 + \left(\frac{\delta g}{\delta g_m}\right)^2 + \left(\frac{c}{c_m}\right)^2 + \frac{d}{d_m}\Big)^2 \leqslant 1.$$

En résumé, les déplacements de foyers sont toujours additifs, mais les carrés moyens minima obtenus au meilleur foyer ne sont additifs qu'aux conditions formulées ci-dessus.

G) *Cas des aberrations d'excentrement.*

19. Cette méthode permet enfin de déterminer les tolérances relatives au montage mécanique des éléments d'un système optique ; si l'on connaît la contribution de chaque lentille (ou groupe de lentilles) aux aberrations, on peut rechercher aisément l'effet d'un décalage longitudinal ou d'un excentrement. Nous donnerons un exemple de calcul dans l'Appendice.

20. *Conclusion.* Le calcul approximatif de l'éclairement au centre de la tache de diffraction nous a permis de déterminer la position du maximum central et de fixer des tolérances à admettre pour les diverses aberrations, isolées ou superposées. Ceci n'est cependant valable que lorsque les aberrations sont faibles et il est impossible de déterminer par cette méthode la répartition des éclairements dans les anneaux. Nous montrerons dans la Deuxième Partie qu'un intégrateur mécanique de construction spéciale permet de résoudre ce problème.

[1] Voir la relation entre γ, γ_0 et γ_i dans Albert Arnulf : La vision dans les instruments. Editions de la Revue d'Optique (1937), p. 49.
[2] Ch. André, Thèse, Paris, 1876.
[3] Straubel, *Astronomische Nachrichten*, 1895, n° 3327.
[4] Conrady, *Monthly Notices Roy. Astr. Soc.*, juin 1919, 575.
[5] Martin, *Monthly Notices Roy. Astr. Soc.*, March 1922, 310.
[6] Nijboer, Thèse, Gröningen, juin 1942.
[7] Françon. Thèse, Paris, 1945 (*R. O.*, octobre 1947).
[8] Lansraux, *R. O.*, t. 26 (1947), p. 24.
[9] Vaisala, *Annales Universitatis fennicae aboensis*. Série A, tome 1, p. 108 (1923).
[10] Wang Ta Hang, *Proc. of Phys. Soc.*, vol. 53, part 2, p. 157 (1941).
[11] Martin, *Transact. Opt. Soc.*, vol. 27, p. 249 (1925).

Note ajoutée à la correction des épreuves.

Comme l'ont montré P. M. Duffieux et G. Lansraux, on peut calculer la surface de section du solide de diffraction en appliquant le théorème de Plancherel à certaines fonctions liées à la répartition des amplitudes et des phases sur la pupille*. On en déduit aisément que cette surface présente bien un maximum absolu lorsque les aberrations sont nulles, ou plus généralement lorsque la phase reste constante quand on décrit sur la pupille une droite perpendiculaire au plan par lequel on coupe le solide de diffraction. En particulier, lorsque l'instrument présente de l'astigmatisme et que l'on met au point sur une focale, la surface de section du solide de diffraction par un plan parallèle à la focale est la même qu'en l'absence d'aberrations : la qualité de l'instrument ne sera pas affectée par l'astigmatisme si l'objet a une structure linéaire parallèle à la focale en question.

* Voir P. M. Duffieux et G. Lansraux : Les facteurs de transmission et la lumière diffractée. *Revue d'Optique*, t. **24** (1945), p. 76, 1re équation 52.

DEUXIÈME PARTIE

PRINCIPE ET CONSTRUCTION D'UN INTÉGRATEUR MÉCANIQUE. EXEMPLES D'APPLICATIONS

I. — Expression mathématique des intégrales

21. L'appareil que nous allons décrire permet de déterminer la répartition de la lumière dans les taches de diffraction en présence d'aberrations variées : aberration sphérique, coma ou astigmatisme d'ordre quelconque, isolées ou superposées.

Ceci nécessite le calcul des deux intégrales doubles $\iint \cos \Psi \, d\omega$ et $\iint \sin \Psi \, d\omega$ étendues à la surface de la pupille de sortie de l'instrument : nous rapporterons cette surface (qui est presque toujours circulaire) à des coordonnées polaires ρ et φ ayant leur origine en son centre P′ (fig. 11).

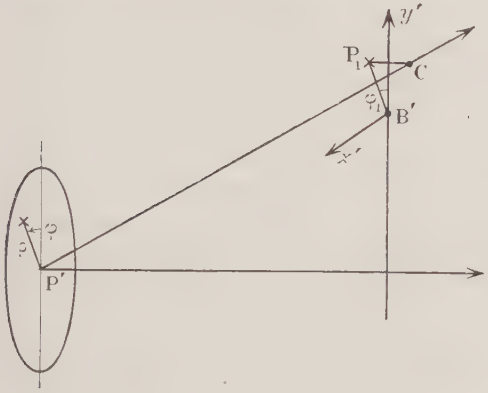

FIG. 11.

Diverses classifications des aberrations géométriques permettent d'exprimer la différence de phase Ψ ou l'écart Δ en fonction de ρ et φ. Nous utiliserons dans ce travail la classification de Nijboer dont nous avons indiqué le principe au § 18. Pour la simplicité des calculs, nous supposerons d'abord que l'ouverture et le champ de l'instrument sont assez faibles ; dans ces conditions l'écart que présente la surface d'onde par rapport à une sphère centrée en un point C voisin du foyer paraxial B′ peut s'exprimer comme suit (fig. 11) :

$$(12) \qquad \Delta = f_0(\rho^2) + \frac{\rho^2 x'}{2R^2} + \frac{\rho\rho_1}{R}\cos(\varphi - \varphi_1) + \rho f_1(\rho^2)\cos\varphi + f_2(\rho^2)\cos 2\varphi$$

où R représente le rayon de la sphère de référence $R = P'C$; x', ρ_1 et φ_1 les coordonnées cylindriques de C par rapport à B′ ; $f_0(\rho^2)$ l'aberration sphérique : $f_1(\rho^2)$ la coma ; $f_2(\rho^2)$ l'astigmatisme. L'étude du tableau de Nijboer nous montre que cette expression contient tous les termes d'aberration du 3e ordre, les termes du 5e ordre sauf un (8 termes sur 9), les termes du 7e ordre sauf trois (11 termes sur 14) ; l'expression (12) sera donc suffisante pour les besoins de la pratique ; on verra d'ailleurs qu'il est possible de transformer rapidement l'appareil pour tenir compte des termes proportionnels à $\cos 3\varphi$, $\cos 4\varphi$, $\cos m\varphi$,... à condition de ne

pas avoir à superposer des termes d'aberration correspondant à plus de 3 valeurs différentes de m. Si l'amplitude vibratoire n'est pas uniforme sur la pupille, mais si l'on peut la représenter par une fonction $f(\rho)$, on est finalement amené à calculer les deux composantes de l'intégrale imaginaire :

$$(13) \qquad \frac{1}{\pi r^2}\int\int f e^{i\Psi}\,\rho\,d\rho\,d\varphi = \frac{1}{\pi r^2}\int_0^r\int_0^{2\pi} e^{i\,2\pi\Delta/\lambda} f(\rho)\rho\,d\rho\,d\varphi.$$

II. — Principe et réalisation

A) *Transformation de l'intégrale double en intégrale simple.*

22. Les intégrateurs mécaniques à roulettes intégrantes ne permettent que le calcul des intégrales simples ; il est donc indispensable de transformer l'intégrale double précédente ; il suffit pour cela de décrire sur la pupille circulaire une spirale d'Archimède de pas suffisamment petit, égal à ε. Considérons en effet la portion de pupille située entre deux arcs consécutifs de la spirale (fig. 12) et deux rayons vecteurs séparés par l'angle élémentaire $d\varphi$: on peut remplacer l'intégration élémentaire par rapport à la variable ρ portant sur l'intervalle ε par l'expression approximative $\frac{1}{\pi r^2}\, e^{i\Psi} f(\rho)\,\rho\varepsilon\,d\varphi$, où l'on prendra pour ρ la valeur correspondant à une spirale S′ située à mi-chemin entre les deux arcs de la spirale S. On applique ainsi la méthode d'intégration approchée dite méthode des trapèzes à la transformation de l'intégrale (13) en une intégrale simple prise le long de la spirale S′ :

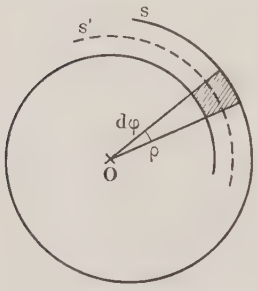

Fig. 12.

$$\frac{\varepsilon}{\pi r^2}\int_0^{2n\pi} e^{i\Psi} f(\rho)\,\rho\,d\varphi$$

(où n est le nombre de tours de la spirale S′ qui sert de chemin d'intégration). On sait que la précision obtenue dépend de la largeur de l'intervalle ε qui est ici égal au pas de la spirale ; nous montrerons au § 23 que l'erreur commise est suffisamment réduite si l'on fait décrire à la spirale S′ 40 tours sur la pupille.

Fig. 13.

Remarque. — Lorsqu'on s'approche du centre ou du bord de la pupille, on ne peut arrêter simplement l'intégration pour une certaine valeur

de φ, ce qui correspondrait à une aire ayant la forme indiquée sur la figure 13. Pour limiter l'opération à une surface exactement circulaire, il y a lieu de tenir compte du rétrécissement progressif de l'intervalle situé entre la spirale et le cercle (ou le centre) ; le chemin d'intégration s' sera encore la ligne médiane de la bande d'intégration limitée cette fois par s et le cercle (ou le centre) (fig. 14), alors que l'intervalle ε tend vers 0.

Fig. 14.

Il nous reste maintenant à décrire l'élaboration de la différence de phase Ψ, puis le fonctionnement du poste d'intégration, où deux roulettes intégrantes calculent les quantités $\int \varepsilon\rho f \cos\Psi \, d\varphi$ et $\int \varepsilon\rho f \sin\Psi \, d\varphi$.

B) *Elaboration de la différence de phase.*

23. Nous avons vu que la différence de phase $\Psi = 2\pi\Delta/\lambda$ est égale à la somme de 5 termes ; chaque terme est représenté par la composante verticale du mouvement d'une poulie ; un ruban d'acier dont une extrémité O est fixée vient passer

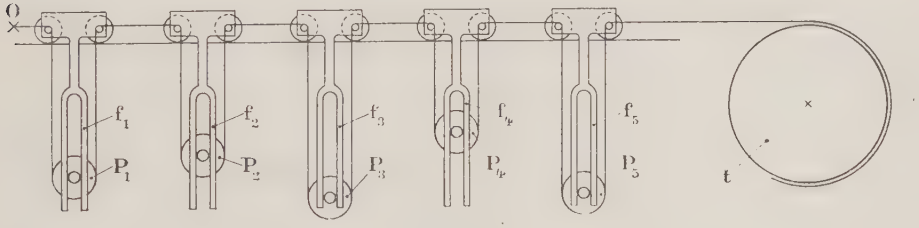

Fig. 15.

successivement sur les 5 poulies et assure ainsi l'addition des mouvements (fig. 15) ; s'il est nécessaire, une fourchette f solidaire d'un chariot oblige le ruban à prendre à l'aplomb de chaque poulie une position parfaitement verticale. Enfin l'extrémité

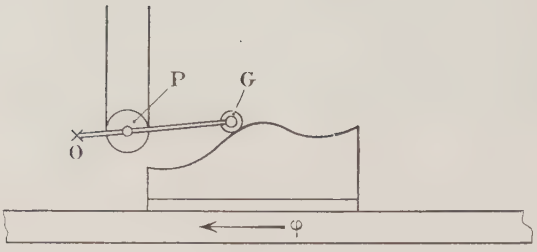

Fig. 16.

libre du ruban s'enroule sur un tambour t dont la rotation est proportionnelle à Ψ.

Indiquons maintenant comment on peut calculer mécaniquement les diverses composantes de Ψ. Deux d'entre elles ne dépendent que de ρ ; elles seront élaborées par deux postes simples ; les trois autres font intervenir un cosinus et nous les obtiendrons à l'aide de postes à manivelles. Les deux postes simples (représentant l'aberration sphérique et le défaut de mise au point) sont constitués par une came disposée dans un plan vertical et un levier amplificateur (fig. 16) ; la came se déplace suivant le paramètre d'intégration (φ) et imprime au galet G du levier un mouvement convenable dont la composante verticale est de la forme $f_0(\rho^2)$ ou $\frac{\rho^2 x'}{2R^2}$ suivant le cas. La distance réglable OP permet de faire varier l'amplitude du terme correspondant de Ψ.

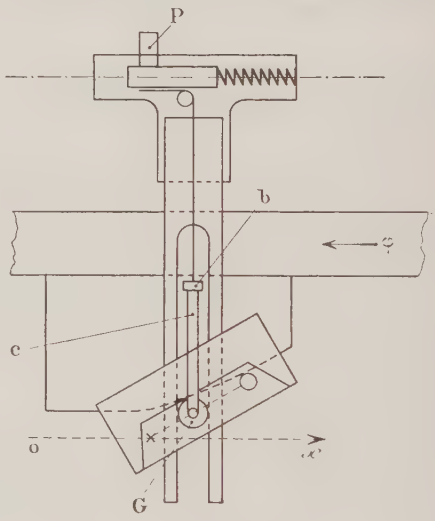

Fig. 17.

Les trois postes à manivelles, représentant l'exploration latérale d'un plan de front, la coma et l'astigmatisme, sont constitués par une came disposée dans un plan horizontal, un levier amplificateur et une manivelle portant la poulie P d'entraînement du ruban. La figure 17 faite dans un plan horizontal montre la came mobile suivant la variable φ, le levier amplificateur qui imprime à un galet G monté dans une chape c le mouvement de translation $\frac{\rho\rho_1}{R}$, ρf_1 ou f_2 suivant le cas. A la chape c est attaché un ruban d'acier par l'intermédiaire d'un roulement à billes b, qui permet au ruban de tourner librement autour d'un axe parallèle à son mouvement de translation. Ce ruban commande le rayon d'une manivelle tournant autour d'un axe horizontal suivant l'azimut $\varphi - \varphi_1$, φ ou 2φ suivant le cas. En projection verticale (fig. 18) on voit que le mouvement imprimé par la poulie P au ruban d'addition est bien le mouvement désiré ; ce sera par exemple $\rho f_1(\rho^2)\cos\varphi$ pour le poste de coma. On règlera l'amplification du mouvement en déplaçant au

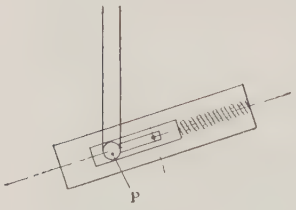

Fig. 18.

préalable l'ensemble de la came et du levier amplificateur par rapport au galet G parallèlement à Ox.

C) *Intégration.*

24. Le mouvement de rotation du tambour t est transmis à une manivelle d'axe vertical dont la rotation représente la différence de phase Ψ ; le rayon de la manivelle est d'autre part commandé par une came verticale qui imprime à une chape le mouvement $\varepsilon\rho f$, la liaison entre la chape et la manivelle étant assurée par un ruban attaché en b à la chape par l'intermédiaire d'un roulement à billes (fig. 19). La manivelle tourne donc suivant l'azimut Ψ, alors que son rayon est égal à $\varepsilon\rho f$. Elle entraîne deux pièces calées à angle droit dans un plan horizontal et mobiles en translation (fig. 20), dont les mouvements seront $\varepsilon\rho f \cos\Psi$ et $\varepsilon\rho f \sin\Psi$; chacune porte une roulette intégrante en contact avec des plateaux mobiles suivant la variable φ. Les intégrales cherchées seront

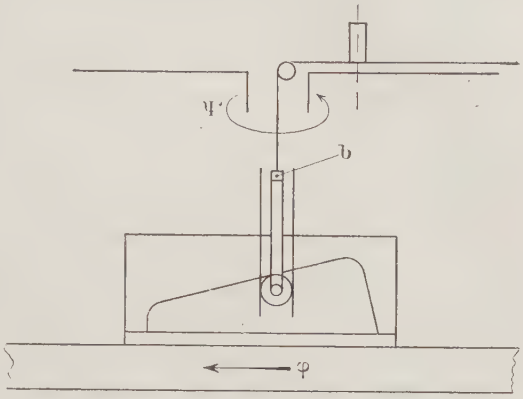

Fig. 19.

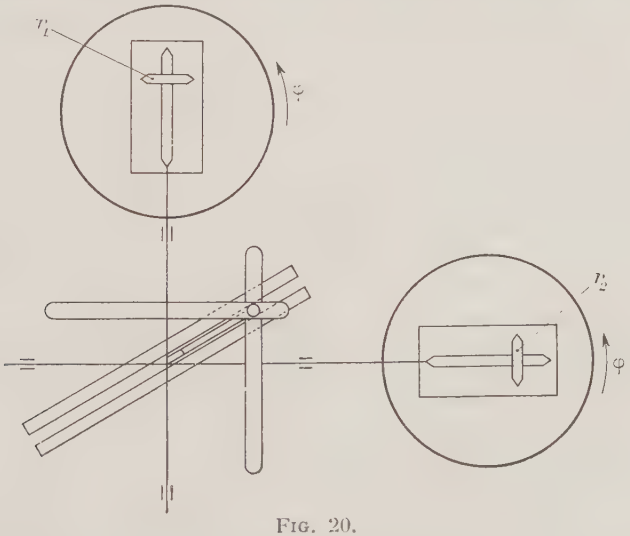

Fig. 20.

proportionnelles aux rotations des roulettes r_1 et r_2. Donnons pour terminer un schéma général de principe de l'appareil (fig. 21), où l'on reconnaîtra les différents postes, les 6 cames étant bien entendu entraînées par un même chariot, mobile suivant le paramètre φ.

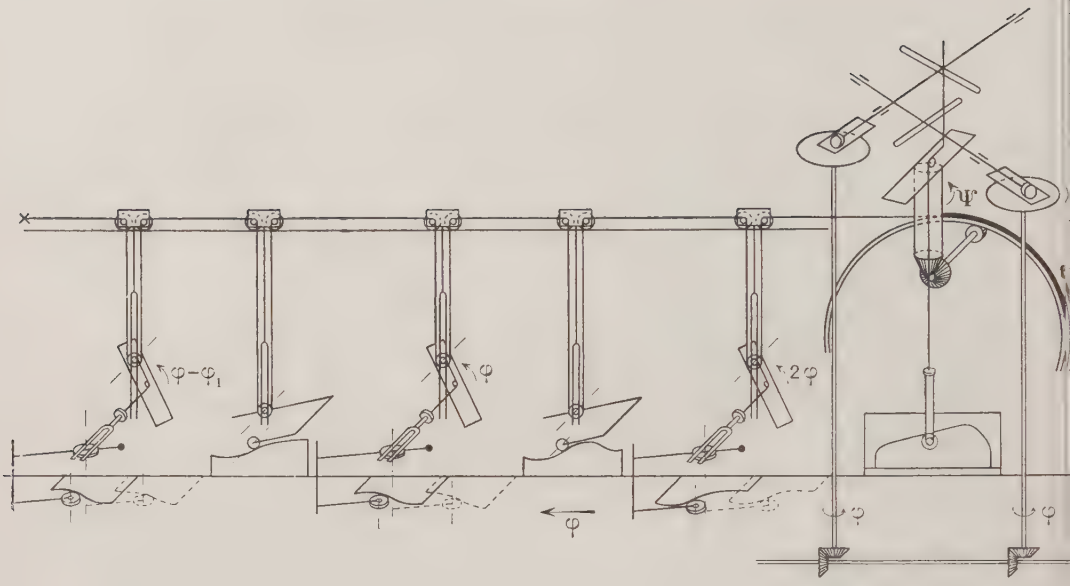

FIG. 21.

D) *Réalisation de l'appareil. Précision obtenue.*

25. La photographie figure 22 permet de voir les postes simples (1) et leurs cames, les postes à manivelles (2), le ruban d'addition (3) qui entraîne le tambour t (4), le poste d'intégration (5) et le couple de roulettes et plateaux intégrateurs (6).

Nous donnons ci-dessous quelques grandeurs caractéristiques de l'appareil :

Course totale du chariot : 200 mm.

Déplacement maximum imprimé au ruban par chacun des postes : 200 mm (correspondant au maximum à 13,5 longueurs d'onde).

Amplitude des cames des postes simples : 50 mm.

Amplification maximum des postes simples : × 2.

Amplitude des cames des postes à manivelles : 50 mm.

Amplification maximum des postes à manivelles : × 1.

Rayon de la manivelle du poste d'intégration : 30 mm.

Circonférence des roulettes intégrantes : 60 mm.

Dimensions de l'appareil : 1,90 × 0,50 m.

Durée d'une opération (un point) : 3 à 15 minutes (suivant l'importance des différences de phase correspondant aux postes à manivelles).

26. Nous allons maintenant étudier la précision de l'appareil : les causes d'erreurs sont de deux sortes : erreur systématique due à la transformation de l'intégrale double en intégrale simple ; erreurs d'origine mécanique dues aux jeux, aux légères imperfections dans la réalisation des surfaces ou des cames, etc. Nous

cherchons d'abord une expression approximative de l'erreur systématique d'intégration.

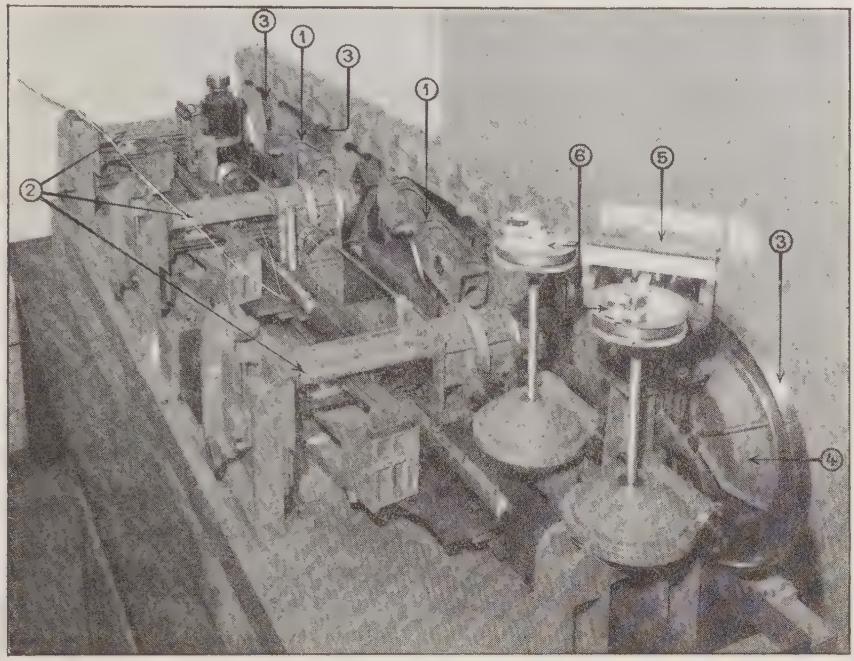

Fig. 22.

1°) *Erreur systématique d'intégration.* — Cherchons une expression commode de l'erreur commise dans la méthode d'intégration approchée dite méthode des trapèzes : soit $F(x)$ la fonction à intégrer : nous supposerons que l'intervalle d'intégration comprend n trapèzes de largeur uniforme égale à ε et nous désignerons par x_0, x_1, x_n les abscisses limitant les trapèzes ; on sait qu'à des infiniment petits d'ordre supérieur près, on peut écrire (ε_4, ε_5, etc. désignant des infiniment petits du 4e, 5e ordre par rapport à ε) :

$$\int_{x_p}^{x_{p+1}} F(x)\,dx = \varepsilon F\left(\frac{x_p + x_{p+1}}{2}\right) + \frac{\varepsilon^3}{24} F''\left(\frac{x_p + x_{p+1}}{2}\right) + \varepsilon_5$$

$$\text{et} \int_{x_0}^{x_n} F(x)\,dx = \sum_{0}^{n-1} \varepsilon F\left(\frac{x_p + x_{p+1}}{2}\right) + \frac{\varepsilon^3}{24} \sum F''\left(\frac{x_p + x_{p+1}}{2}\right) + \varepsilon_4.$$

En appliquant cette relation à la fonction F'' on peut encore écrire :

$$\sum \varepsilon F''\left(\frac{x_p + x_{p+1}}{2}\right) = \int_{x_0}^{x_N} F''(x)\,dx - \frac{\varepsilon^3}{24} \sum F''''\left(\frac{x_p + x_{p+1}}{2}\right) + \ldots\ldots,$$

ce qui permet d'exprimer l'erreur d'intégration comme suit :

$$(14)\qquad \int_{x_0}^{x_n} F(x)\,dx - \sum_{0}^{n-1} \varepsilon F\left(\frac{x_p + x_{p+1}}{2}\right) = \frac{\varepsilon^2}{24}\left(F'_{x_n} - F'_{x_0}\right) + \varepsilon'.$$

Soit maintenant F (ρ, φ) la fonction à intégrer dans le cercle de pupille par rapport aux deux variables ρ et φ. Nous avons remplacé l'intégration continue par rapport à la variable ρ par une somme finie de termes en nombre égal au nombre de tours que décrit le chemin d'intégration s'. La largeur des intervalles est constante, sauf aux extrémités de s' où elle tend progressivement vers 0 ; en négligeant l'influence des extrémités, ce qui n'entraîne qu'une erreur d'ordre 3 au moins par rapport à ε, on peut écrire la partie principale de l'erreur d'intégration sous la forme :

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{r} F(\rho,\varphi)\,d\rho\,d\varphi - \int_0^{2\pi} d\varphi \sum_{0}^{n-1} \varepsilon F(\rho,\varphi) \simeq \frac{\varepsilon^2}{24}\int_0^{2\pi} [F'_\rho(r,\varphi) - F'_\rho(0,\varphi)]\,d\varphi.$$

La fonction F (ρ, φ) ne présentant pas de singularité au point ρ = 0, sa dérivée par rapport à ρ changera de signe lorsque φ augmente de π. On a donc :

$$\int_0^{2\pi} F'_\rho(0,\varphi)\ d\varphi = 0\ ;$$

l'erreur d'intégration s'écrit finalement, lorsque f(ρ) ≡ 1 :

$$(15)\qquad \frac{\varepsilon^2}{24\pi r^2}\int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\, e^{i\Psi(\rho,\varphi)}\right) d\varphi = \frac{\varepsilon^2}{24\pi r^2}\int_0^{2\pi} e^{i\Psi}\left(1 + i\rho\frac{\partial\Psi}{\partial\rho}\right) d\varphi.$$

Prenons l'exemple de l'aberration sphérique du 3e ordre avec mise au point au foyer paraxial ; en supposant que la différence de marche marginale soit de 5 λ, on aura :

$$\Psi = 10\pi(\rho/r)^4 \qquad \frac{\partial\Psi}{\partial\rho} = 40\pi\rho^3/r^4$$

et si ρ = r le module de l'erreur sera sensiblement égal à :

$$\frac{\varepsilon^2}{24\pi r^2}\int_0^{2\pi} 40\pi\,d\varphi = \frac{10}{3}\pi\left(\frac{\varepsilon}{r}\right)^2.$$

Nous avons choisi ε/r = 1/40, ce qui conduit à une erreur sensiblement égale à 1/150 ; cette valeur est très acceptable. En effet :

1) Le cas précédent, où Ψ reste constant au bord de la pupille ainsi que $\frac{\partial\Psi}{\partial\rho}$, est défavorable ; dans la majorité des cas Ψ et sa dérivée varieront notablement, leurs composantes (réelle et imaginaire) prenant des valeurs alternativement posi-

tives et négatives ; il en résultera que le module de l'intégrale curviligne représentant l'erreur sera le plus souvent très inférieur à la valeur précédente.

2) Dans les cas défavorables il sera toujours possible de calculer une valeur approximative de la correction en remplaçant l'intégrale précédente par une somme finie de termes correspondant par exemple à $\varphi = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \ldots 2\pi$. Les valeurs de Ψ pourront être lues sur l'appareil pendant le dernier tour décrit sur le chemin s' ; les valeurs de $\frac{\partial \Psi}{\partial \rho}$ pourront être calculées à partir des aberrations inscrites sur l'appareil ; on s'apercevra le plus souvent que la correction est négligeable ; on devra cependant la déterminer dans les cas où Ψ et $\partial\Psi/\partial\rho$ restent constants au bord de la pupille (symétrie de révolution).

2°) *Erreurs d'origine mécanique.* — Il est difficile de chiffrer l'influence des erreurs mécaniques dans l'élaboration de la fonction Ψ et dans le fonctionnement du poste d'intégration, l'influence de l'allongement du ruban d'addition dû aux variations de sa tension, etc. En supposant par exemple que Ψ soit élaboré avec une erreur de 0,01 radian, on obtiendra aisément pour limite supérieure du module de l'erreur sur l'intégrale la valeur : $\iint \left| \delta e^{i\Psi} \right| d\omega = 0{,}02$. En fait cette limite ne sera jamais atteinte, le facteur $e^{i\Psi}$ prenant des valeurs très variées au cours de l'intégration ; seul l'usage de l'appareil permet d'en connaître la précision ; après l'exécution d'un assez grand nombre d'intégrations, nous avons pu établir les résultats suivants :

a) L'erreur la plus importante provient de l'élaboration de Ψ et non du fonctionnement des roulettes intégrantes ;

b) Lorsqu'on effectue un mouvement d'aller et retour, les roulettes reviennent au zéro avec une précision de quelques millièmes, ce qui montre que les jeux mécaniques sont convenablement réduits ; on adopte pour valeur de l'intégrale la moyenne des deux valeurs trouvées à l'aller et au retour ;

c) Dans le cas où la valeur de l'intégrale est connue (tache d'Airy, divers cas de défauts de mise au point ou d'aberration sphérique, certains cas de coma et d'astigmatisme), la précision obtenue sur l'amplitude vibratoire correspond à une erreur absolue de quelques millièmes ; l'erreur dépasse rarement 0,005 et l'erreur sur l'intensité ne dépassera généralement pas les valeurs indiquées ci-dessous :

$I =$	1	0,1	0,01	0,001	0,0001
$A = \sqrt{I} =$	1	0,3	0,1	0,03	0,01
$\delta I = 2\,A\,\delta A$	0,01	0,003	0,001	0,0003	0,0001

Cet appareil permet donc de déterminer de façon convenable les intensités supérieures à 0,01 et grossièrement celles de l'ordre de 0,001, ce qui est très suffisant pour les besoins de la pratique.

III. — Exemples d'études

A) *Vérification de la formule* (11) :

27. La formule (11) indique que l'éclairement au meilleur foyer est constant lorsqu'on satisfait à la relation

$$\left(\frac{L}{L_m}\right)^2 + \left(\frac{\delta g}{\delta g_m}\right)^2 + \left(\frac{c}{c_m}\right)^2 + \left(\frac{d}{d_m}\right)^2 = 1.$$

Nous avons étudié le cas où L_m, δg_m, c_m, d_m correspondent exactement à $E_0 = \lambda^2/180$; nous indiquons ci-dessous les valeurs des aberrations correspondantes

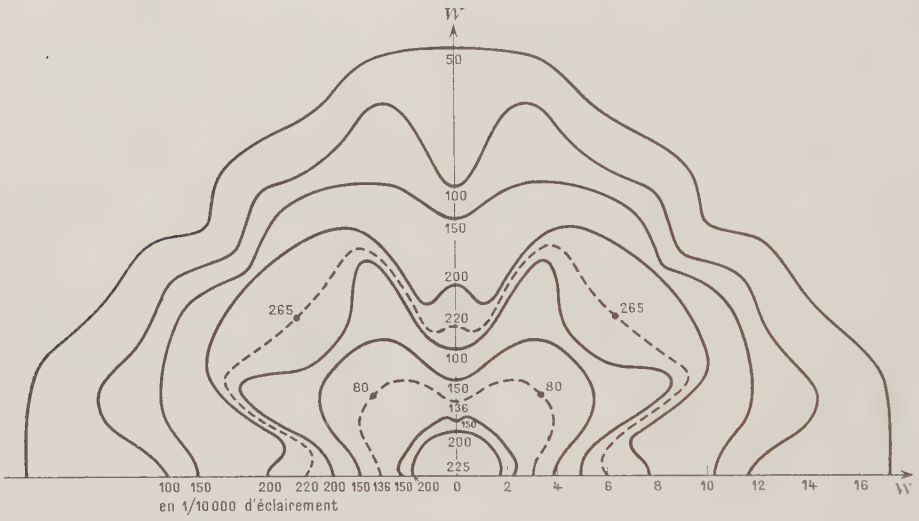

Fig. 23.

et l'éclairement focal trouvé à l'aide de l'intégrateur pour les diverses aberrations, isolées puis superposées après avoir été réduites à la moitié de leur valeur initiale :

a) aberration sphérique du 3e ordre égale à λ au foyer paraxial avec mise au point au milieu de la caustique : 0,800

b) coma du 3e ordre égale à $\pm \sqrt{\frac{2}{5}}\ \lambda$ avec mise au point aux 2/9 de l'étendue de la tache comatique : 0,796

c) astigmatisme égal à $\pm \frac{\lambda}{\sqrt{30}}$ (mise au point sur le « cercle de moindre diffusion ») : 0,800

d) défaut de mise au point (ou courbure de champ) égal à $\lambda/\sqrt{15}$: 0,790

e) superposition des diverses aberrations précédentes préalablement divisées par $2\left(\frac{L}{L_m} = \frac{\delta g}{\delta g_m} = \frac{c}{c_m} = \frac{d}{d_m} = \frac{1}{2}\right)$: 0,801

Remarquons enfin que la relation (2) donne dans ces divers cas $e \geqslant 0{,}792$. Les résultats obtenus confirment la relation théorique (11).

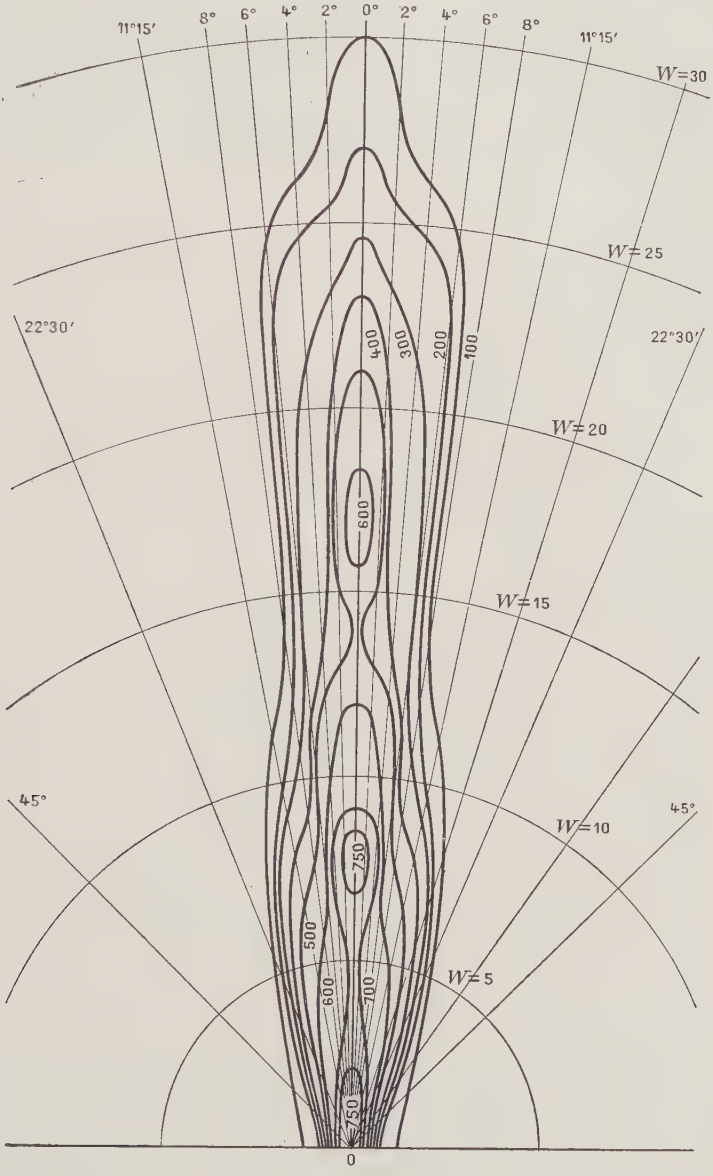

Fig. 24.

B) *Etude d'un cas d'astigmatisme.*

28. Nous avons étudié un cas d'astigmatisme correspondant au montage expérimental que nous décrirons au § 38 ; l'astigmatisme était égal à $\pm$ 1,275 λ.

Nous représentons sur les figures 23 et 24 les courbes isophotes obtenues lorsque l'on met au point sur le « cercle de moindre diffusion » (fig. 23) et au voisinage immédiat d'une focale (fig. 24) (défaut de mise au point égal à 1,38 λ par rapport au cercle de moindre diffusion) (1). On constate que, bien que l'aberration soit déjà importante (elle est de l'ordre de 2,5 λ), la mise au point au milieu de la distance qui sépare les deux focales nous donne une figure de diffraction qui ressemble peu au cercle de moindre diffusion de l'optique géométrique. L'énergie se concentre pratiquement en 9 maxima disposés en damier, de sorte que la limite

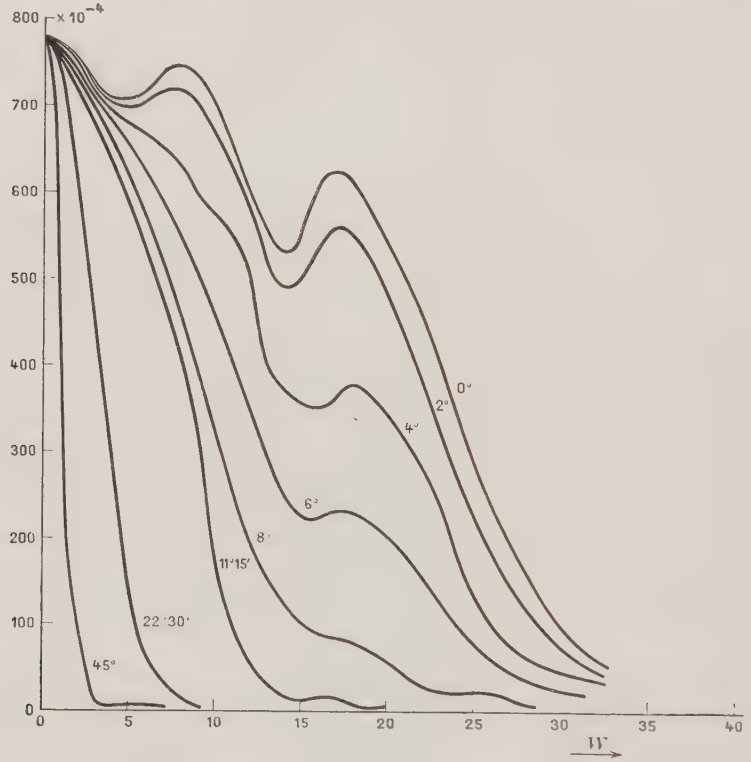

Fig. 25.

de résolution de l'instrument peut être bonne si l'objet a une structure périodique et si la période correspond à la distance entre les maxima. Cette conclusion était totalement imprévisible par l'optique géométrique. On remarque d'autre part que les 9 maxima sont contenus dans une aire nettement inférieure au cercle de moindre diffusion géométrique qui aurait pour rayon $W = 16$. On constate également sur la figure 24 que la longueur effective de la focale est inférieure à celle qu'indiquerait l'optique géométrique ($W = 32$). Nous publierons ultérieurement

(1) La figure 25 représente diverses sections du solide de diffraction par des plans dont les azimuts sont indiqués sur chaque courbe.

l'ensemble des résultats obtenus dans de nombreux cas d'aberration sphérique, de coma, d'astigmatisme ou de superposition de ces diverses aberrations.

C) *Etude de l'influence d'un résidu d'aberration sphérique dans un objectif de microscope.*

29. Un objectif de microscope bien corrigé de l'aberration sphérique (et de sa variation chromatique) possédait pour la raie D du sodium un résidu d'aberration

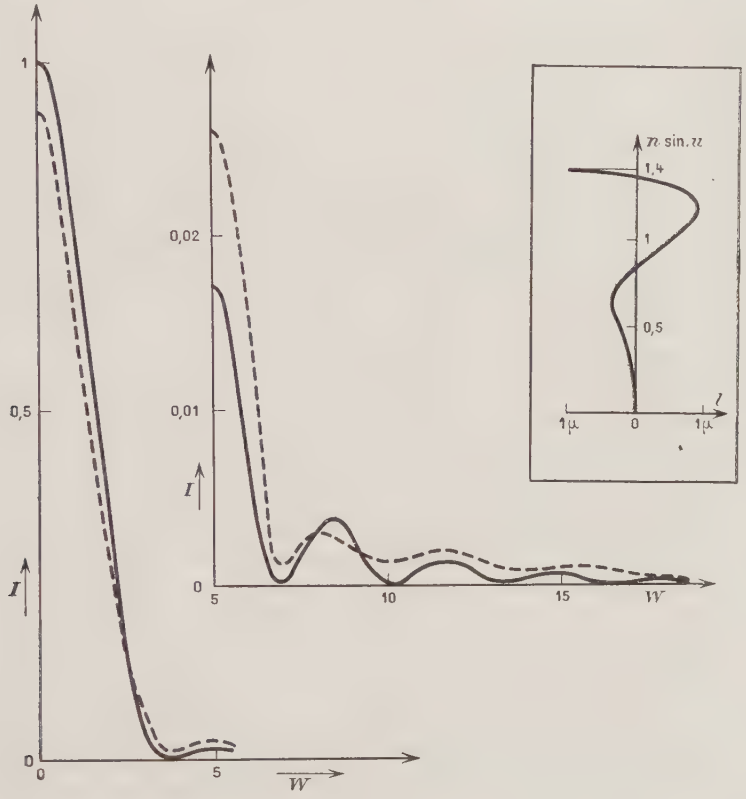

Fig. 26.

sphérique représenté par la courbe dessinée en cartouche sur la figure 26 (on a représenté l'aberration que l'on obtiendrait en renversant le sens de la marche de la lumière) ; il est facile d'en déduire la valeur de Δ en fonction de l'ouverture dans l'espace image (le sens de propagation de la lumière étant le sens normal) et de découper rapidement une came convenable. Les résultats des calculs effectués à l'aide de l'intégrateur permettent alors de tracer les courbes de la figure 26, où nous avons dû prendre successivement deux échelles en ordonnées (l'échelle utilisée pour $W > 5$ est 50 fois plus grande que celle utilisée pour $0 < W < 5$).

On peut constater que l'objectif est pratiquement parfait ; cependant la légère

baisse d'éclairement au centre de la tache se traduit par une augmentation importante de l'éclat du premier anneau, ce qui peut entraîner une baisse de pouvoir séparateur si l'objet a un faible contraste. (Signalons que l'amplitude des variations de Δ n'excédait pas $\lambda/7$).

IV. — Utilisation de l'appareil pour la recherche de la meilleure correction des aberrations

A) *Détermination pratique des coefficients d'aberration à partir des résultats du calcul de l'instrument.*

30. Nous supposerons encore ici que l'ouverture et le champ de l'instrument ne sont pas trop grands, de façon à pouvoir assimiler à l'unité le cosinus des angles que font les rayons avec l'axe ; pour les besoins de la pratique cette approximation quoique grossière est cependant suffisante jusqu'à des ouvertures de l'ordre de $f/1{,}5$, ou des demi-angles de champ de l'ordre de 25° : on sait en effet que le calculateur opticien ne détermine les aberrations qu'avec une précision relative de l'ordre de 5 à 10 %. On peut donc tolérer sur les cosinus des angles une erreur du même ordre. Nous reviendrons au chapitre V sur les modifications que nous devons effectuer lorsqu'on dépasse les limites précédentes.

Commençons par étudier le cas très simple d'un instrument pour lequel on a déterminé l'aberration sphérique, l'écart à la condition des sinus et la position des focales sur le rayon moyen sortant de la pupille pour un certain angle de champ. Les aberrations que nous envisagerons se réduisent aux termes suivants de Δ (où u' et φ sont l'angle d'ouverture et l'azimut par rapport au plan méridien de symétrie, t et s les abscisses des focales par rapport au plan de l'image paraxiale :

$$\Delta = F_0 (\sin u') + F_1 (\sin u') \cos \varphi - \frac{\sin^2 u'}{2} \left[\frac{t+s}{2} + \frac{t-s}{2} \cos 2\varphi \right],$$

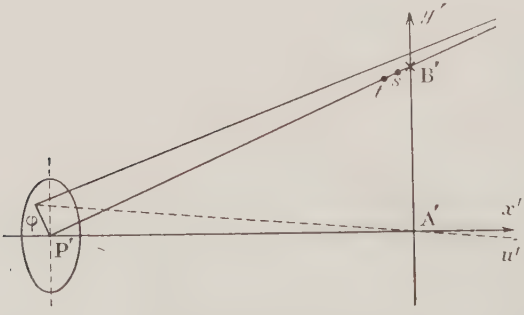

Fig. 27.

où $F_0 (\sin u')$ représente l'aberration sphérique, $F_1 (\sin u')$ la coma ; le centre de la sphère de référence est placé au point B′, intersection du rayon moyen P′B′ (fig. 27) avec le plan de l'image paraxiale (nous employons ici le paramètre $\sin u'$ de préférence à u' ou $\operatorname{tg} u'$, car il apparaît naturellement dans le calcul trigonométrique). Nous démontrerons à l'appendice la relation bien connue qui lie l'aberration sphérique longitudinale à l'écart $F_0 (\sin u')$; on a :

$$l = - \frac{1}{\sin u'} \frac{\partial F_0}{\partial u'}$$

ou encore :

$$F_0 (\sin u') = - \int_0^{u'} l \sin u' \, \mathrm{d}\, u' = \int_0^{u'} l \, \mathrm{d} (\cos u').$$

Ceci nous permettra de déterminer F_0 à partir de la courbe d'aberration sphérique longitudinale. Nous montrerons également comment on peut déterminer F_1 à partir des variations du rapport de convergence g et de l'aberration sphérique l :

$$F_1 (\sin u') = y' \sin u' \left[\frac{\delta g}{g} - \frac{l}{\mathrm{P'A'}} \right].$$

On connaît donc aisément dans ce cas l'expression de Δ tenant compte de tous les résultats obtenus au cours du calcul trigonométrique ; il sera nécessaire de procéder à une intégration pour obtenir F_0 ; on pourra se reporter au chapitre 12 du cours de Calcul des combinaisons optiques de Mr H. Chrétien (1), où l'on trouvera l'exposé de diverses méthodes précises ; en fait le calculateur ne dispose généralement que de quelques valeurs de l (sin u'). souvent entachées d'erreurs importantes ; il serait donc illusoire de rechercher une grande précision dans l'intégration ; le tracé de la courbe représentant $l \times \sin u'$ et l'application de la méthode des trapèzes ou l'utilisation d'un planimètre seront suffisants. Si l'on veut étudier la tache de diffraction obtenue en divers points du champ de l'instrument, il suffira de faire varier par le jeu des leviers amplificateurs de l'intégrateur les proportions de coma et d'astigmatisme, la coma étant proportionnelle à la grandeur de l'image et l'astigmatisme résultant du calcul trigonométrique.

31. Etudions maintenant le cas plus général où l'on a tracé un certain nombre de rayons provenant du même point objet B sans se limiter à ceux qui cheminent dans le plan méridien de symétrie. L'intégrateur étant construit pour étudier l'influence des premiers termes de Ψ' jusqu'aux termes en cos 2φ, nous allons chercher comment on peut déterminer ces termes à partir du tracé trigonométrique. Nous appellerons, avec Nijboer, termes d'aberration sphérique et de courbure de champ, ceux qui sont indépendants de φ ; termes de coma, ceux qui sont proportionnels à cos φ ; termes d'astigmatisme, ceux qui contiennent cos 2φ ; on sait que l'astigmatisme ordinaire correspond à des termes proportionnels à $\rho^2 \cos 2\varphi$; les termes en $\rho^4 \cos 2\varphi$, $\rho^5 \cos 2\varphi$,... représentent l'astigmatisme généralisé ; Nijboer les désigne respectivement par astigmatisme secondaire, tertiaire, etc. Nous écrirons :

$$\Delta = F_0 (\sin u') + F_1 (\sin u') \cos \varphi + F_2 (\sin u') \cos 2\varphi. \qquad (16)$$

Si l'on cherche les coordonnées de l'intersection d'un rayon aberrant avec le plan de l'image paraxiale dans des axes $\mathrm{B'}y'z'$, on peut utiliser des formules analogues à celles de Nijboer dont nous rappellerons la démonstration :

---

(1) Henri Chrétien. Cours de Calcul des Combinaisons optiques. Editions de la *Revue d'Optique*.

$$\begin{cases} y' = \dfrac{\cos\varphi}{\cos u'}\dfrac{\partial\Delta}{\partial u'} - \dfrac{\sin\varphi}{\sin u'}\dfrac{\partial\Delta}{\partial\varphi} \\ z' = \dfrac{\sin\varphi}{\cos u'}\dfrac{\partial\Delta}{\partial u'} + \dfrac{\cos\varphi}{\sin u'}\dfrac{\partial\Delta}{\partial\varphi} \end{cases}$$

et l'on trouve :

$$(17)\quad \begin{cases} y' = \cos\varphi\,[F'_0 + F_1\cos\varphi + F'_2\cos 2\varphi] + \dfrac{\sin\varphi}{\sin u'}\,[F_1\sin\varphi + 2F_2\sin 2\varphi] \\ z' = \sin\varphi\,[F'_0 + F'_1\cos\varphi + F'_2\cos 2\varphi] - \dfrac{\cos\varphi}{\sin u'}\,[F_1\sin\varphi + 2F_2\sin 2\varphi]. \end{cases}$$

Pour une ouverture sin u' déterminée, nous choisirons les rayons correspondant à $\varphi = 0, \dfrac{\pi}{2}, \pi, \dfrac{3\pi}{2}$, auxquels nous affecterons respectivement les numéros 1, 2, 3, 4 ; il leur correspond 4 points d'intersection M_1, M_2, M_3, M_4 (fig. 28). On vérifiera aisément à l'aide des formules précédentes que l'on a :

$$F'_0 = \frac{\overline{M_3M_1} + \overline{M_4M_2}}{4},$$

$$F'_1 = \frac{\overline{B'M_1} + \overline{B'M_3}}{2},$$

$$F'_2 = \frac{\overline{M_3M_1} - \overline{M_4M_2}}{4}.$$

Ces formules sont familières à ceux qui utilisent la méthode de Hartmann pour l'étude pratique des aberrations ; cependant la fonction F_2 représente ici l'astigmatisme généralisé. En effectuant un tracé trigonométrique pour diverses valeurs de l'ouverture, on obtiendra les valeurs de F'_0, F'_1, F'_2 en fonction de sin u', ce qui permettra de déterminer F_0, F_1, F_2 par intégration. Signalons enfin que si l'on a effectué une « marche d'astigmatisme » déterminant la position des focales, on en déduira les premiers termes des développements de F_1 et F_2 ; en appelant t et s les abscisses des focales par rapport au plan de l'image paraxiale, on aura :

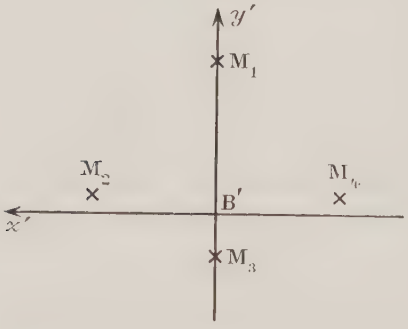

Fig. 28.

$$F_0(\sin u') = -\frac{\sin^2 u'}{2}\frac{t+s}{2} + \ldots\ldots$$

$$F_2(\sin u') = -\frac{\sin^2 u'}{2}\frac{t-s}{2} + \ldots\ldots$$

les autres termes étant obtenus par la méthode précédente.

32. Indiquons enfin une méthode permettant de déterminer dans le cas général les fonctions figurant au développement de Δ en série de Fourier :

$$\Delta = \sum_{0}^{\infty} F_m (\sin u') \cos m\varphi ;$$

on aura :

$$(18) \quad \begin{cases} y' = [\sum F'_m (\sin u') \cos m\varphi] \cos \varphi + [\sum m F_m (\sin u') \sin m\varphi] \dfrac{\sin \varphi}{\sin u'} \\ z' = [\sum F'_m (\sin u') \cos m\varphi] \sin \varphi - [\sum m F_m (\sin u') \sin m\varphi] \dfrac{\cos \varphi}{\sin u'} \end{cases}$$

Les équations (18) montrent que les deux séries de fonctions

$$\sum F_m \cos m\varphi \text{ et } - \sum m F_m \sin m\varphi$$

sont les composantes y'_1, z'_1 du vecteur aberration transversale B'M dans le système d'axes B'y'_1 z'_1 qui font avec les axes B'$y'z'$ l'angle φ (fig. 29). Si l'on a déterminé la position de M pour diverses valeurs de φ on peut connaître les fonctions y'_1, z'_1 ; en procédant ensuite à leur analyse harmonique, on obtiendra les valeurs des diverses fonctions composantes pour une ouverture déterminée : l'analyse de y'_1 conduit aux valeurs des dérivées F'_0, F'_1, etc., alors que l'analyse de z'_1 conduit aux fonctions elles-mêmes, ce qui semble plus avantageux. Cependant on n'effectue généralement le tracé trigonométrique des rayons que pour quelques valeurs de φ de la forme p/n 2 π, où n et p sont deux entiers ; seule l'analyse harmonique de y' est alors possible, à condition encore d'en limiter le nombre de termes ; c'est ainsi qu'au § 31 nous avons pu déterminer F'_0, F'_1, F'_2 à partir de 4 positions de M, en supposant nulles les composantes F_3, F_4... Si l'on voulait faire intervenir le terme F_3 cos 3 φ, il serait utile de tracer le rayon correspondant à $\varphi = 2\pi/3$, ce qui fournit par symétrie la position de celui qui correspond à $\varphi = 4\pi/3$; appelant α, β, γ les valeurs de y'_1 pour $\varphi = 0$, $\dfrac{2\pi}{3}$, $\dfrac{4\pi}{3}$, on aura :

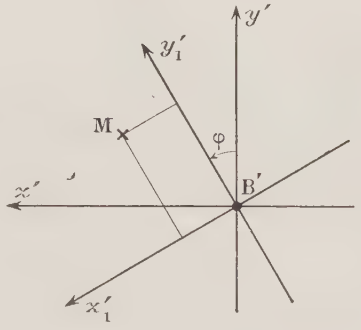

Fig. 29.

$$F'_0 + F'_3 = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3} ,$$

ce qui permet de connaître F'_3 en supposant nuls les termes d'ordre supérieur, l'intégrateur permettra d'étudier l'influence de ces termes à condition de transformer l'un des postes à manivelles de façon que sa rotation soit égale à 3 φ.

B. — *Calcul des cames.*

33. Ce calcul ne présente pas de difficultés particulières. Examinons par exemple le cas du poste destiné à élaborer l'aberration sphérique, la fonction F_0 étant connue ; il faudra que le déplacement vertical du galet qui roule sur la came et entraîne le levier amplificateur soit égal à F_0, alors que le déplacement horizontal de la came est égal au paramètre φ (fig. 30). Le lieu L du centre du galet (par rapport à la came) est alors parfaitement défini et le profil de la came sera une courbe parallèle à L. Si l'on veut atteindre une grande précision, il y aura lieu d'effectuer le calcul analytique : ce sera le cas des recherches théoriqes sur les aberrations du 3e ordre ; si au contraire on veut représenter l'aberration sphérique d'un instrument, qui n'est généralement connue qu'avec une précision relative médiocre, il suffira de procéder graphiquement en dessinant d'abord L, puis le profil de découpage.

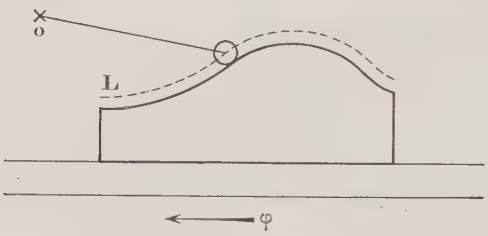

Fig. 30.

L'étude de la répartition de la lumière dans l'image d'un point lumineux nécessite donc l'établissement de cames représentant les résultats du calcul de l'instrument ; nous avons cependant supposé que le champ et l'ouverture ne sont pas grands ; nous allons maintenant examiner le cas où cette approximation n'est plus valable.

V. — Cas ou le champ ou l'ouverture de l'instrument sont grands

A) *Instruments à grand champ.*

34. Supposons d'abord que le champ de l'instrument soit important, mais que l'ouverture de la pupille reste modérée : le calculateur détermine généralement les coordonnées y', z' de l'intersection du rayon avec le plan image en fonction des coordonnées polaires ρ et φ de son intersection avec le plan de la pupille et de l'angle de champ (fig. 31). Soit B′ X' Y' z' un trièdre tel que B′ X' passe par le centre P′ de la pupille, P′ X' Yz un trièdre parallèle au premier ; dans les axes B′ X' Y' z' les coordonnées de l'intersection M du rayon avec le plan image seront sensiblement y' sin θ, y' cos θ, z', alors que l'intersection du rayon avec le plan P′Yz a pour coordonnées :

$$Y = y \cos\theta = \rho \cos\varphi \cos\theta, \quad z = \rho \sin\varphi.$$

Si maintenant on définit des coordonnées polaires ρ', φ' dans le plan P′Yz par les relations $Y = \rho' \cos\varphi'$, $z = \rho' \sin\varphi'$, on est ramené au problème traité précédemment ; en effet, le calcul trigonométrique permet de déterminer y' z' en fonction de ρ' et φ', c'est-à-dire Y', z' en fonction de ρ' et φ'. On peut alors appliquer aux fonc-

tions Y', z' la méthode du § 28 pour déterminer les différents termes de Δ ; un nouveau changement de variables nous permettra enfin d'obtenir Δ en fonction de ρ et φ, expression que l'on utilisera pour l'établissement des cames. On voit que lorsque le champ de l'instrument est important, les calculs à effectuer sont plus longs qu'à l'ordinaire, mais que l'intégrateur nous permettra encore d'obtenir les résultats cherchés.

B) *Instruments à grande ouverture* :

35. Mr H. H. Hopkins (1) a montré que lorsque l'ouverture est importante on ne peut faire la somme algébrique des vibrations émanant de la pupille, mais qu'il faut tenir compte de l'état de polarisation de la lumière et des variations d'orientation du vecteur vibration électrique sur la surface d'onde. Utilisant le principe de Huyghens, Mr H. H. Hopkins a effectué le calcul de la répartition des éclairements dans la tache de diffraction en l'absence d'aberrations géométriques lorsque l'onde incidente est polarisée rectilignement. La tache-image perd la symétrie de révolution, mais les modifications ne sont pas importantes, même lorsque l'ouverture dépasse $f/1$ ($\sin \alpha' = 30°$). On peut penser qu'il en est de même lorsque les aberrations géométriques interviennent. En fait, une théorie rigoureuse de ces phénomènes nécessiterait une étude approfondie de la propagation des ondes électromagnétiques aux grandes ouvertures, l'étude de la légitimité de l'emploi des formules de Kirchhoff et du principe de Huyghens, etc.

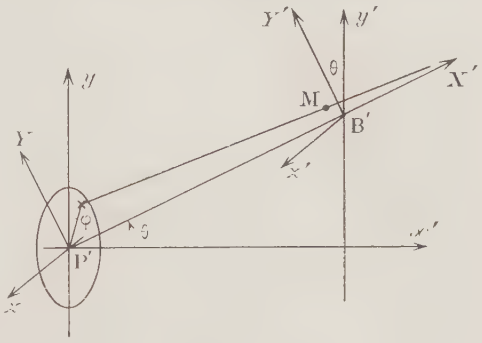

Fig. 31.

36. En conclusion, l'appareil intégrateur que nous avons décrit permet d'étudier convenablement la répartition de la lumière dans les images instrumentales lorsqu'on connaît les aberrations géométriques du système optique. Il sera applicable à la plupart des instruments courants et permettra de connaître la qualité de ceux-ci sans qu'on ait à entreprendre la construction d'un prototype.

Il reste maintenant à vérifier expérimentalement les résultats des calculs effectués à l'aide de cet appareil. C'est ce que nous allons faire dans la Troisième Partie de ce mémoire.

---

(1) H. H. Hopkins, *Proc. Phys. Soc.*, vol. 55, p. 116 (1943) et vol. 61, p. 48 (1944).

TROISIÈME PARTIE

ÉTUDE EXPÉRIMENTALE DE LA RÉPARTITION DES ÉCLAIREMENTS DANS LES TACHES DE DIFFRACTION

I. Généralités.

37. On calcule le plus souvent les phénomènes de diffraction en appliquant le principe de Huyghens-Fresnel à la portion de l'onde intérieure au contour de la pupille et en négligeant l'effet des perturbations apportées par les bords à la propagation de la lumière ; ces perturbations, variables avec la nature de l'écran utilisé, ne s'étendent que dans un espace très restreint, de l'ordre de quelques longueurs d'onde au voisinage de la limite de l'écran. Elles peuvent cependant apporter une modification à la structure de la tache de diffraction dans le cas où les ouvertures sont petites et il nous a paru intéressant de procéder à une vérification expérimentale de la répartition de la lumière dans les images optiques. C. D. Hause, Woodward et Mc Clellan [1] ont déjà étudié le cas de l'image d'une droite lumineuse fournie par un instrument parfait, en utilisant un montage photoélectrique à amplificateur qu'ils venaient de réaliser, et vérifié les résultats théoriques obtenus par Ch. André [2]. Plus récemment Jones et Wolfe [3] ont proposé un procédé de photométrie photographique permettant également d'étudier l'image d'une droite.

Nous avons préféré étudier l'image d'un point lumineux, de façon à exécuter une vérification directe de résultats déjà anciens (tache d'Airy, défauts de mise au point), ou de résultats nouveaux obtenus à l'aide de l'intégrateur mécanique.

La détermination de la répartition de la lumière dans l'image optique d'un point lumineux pose un problème délicat ; on doit mesurer des flux extrêmement faibles, dont la valeur ne dépend pratiquement pas des caractéristiques du montage ; soit en effet ds la surface du « point » source utilisé ; cette surface sera suffisamment réduite pour que son image géométrique soit petite par rapport aux dimensions du phénomène de diffraction ; lorsqu'elle est circulaire, son rayon r peut sans inconvénient être 5 fois plus petit que celui du premier anneau noir de la tache d'Airy ; si B est la brillance du trou source, α l'angle du petit cône de révolution dans lequel il rayonne, le flux émis est égal à :

$$d\varphi = B\,\pi r^2\,\pi\alpha^2.$$

On peut transformer cette expression en faisant apparaître les variables α', r' correspondant à l'espace image et en appliquant la relation de Lagrange $r\alpha = r'\alpha'$. Si T est le facteur de transmission du système optique, le flux qui atteint le récepteur est :

$$d\varphi' = TB\,\pi^2\alpha'^2 r'^2. \tag{19}$$

Le rayon r' de l'image du trou devra être au moins 5 fois plus petit que le rayon du premier anneau noir de la tache d'Airy ; on aura donc :

$$r' \leqslant \frac{1}{5} \frac{1{,}2\ \lambda}{2\alpha'}.$$

Il en résulte que le produit $r'\alpha'$ est limité supérieurement et que le flux réparti dans le phénomène de diffraction ne dépend pratiquement que de la brillance B du trou objet et du facteur de transmission T, qui est généralement peu inférieur à l'unité.

Des expériences préliminaires ont montré que même en utilisant les sources les plus intenses associées à des récepteurs photoélectriques très sensibles, on n'obtient pas une déviation suffisante pour permettre des mesures convenables. La sensibilité maximum était obtenue avec une cellule photoélectrique au caesium à multiplicateur d'électrons ; la source était une lampe à vapeur de mercure à haute pression Philips SP 500, utilisée pour la raie verte, ou encore une lampe à filament de tungstène boudiné, utilisée dans le proche infrarouge et survoltée ; dans les deux cas, la sensibilité obtenue était au moins 10 fois trop faible pour qu'on pût étudier convenablement la tache d'Airy. Une amplification supplémentaire du courant photoélectrique n'aurait pas amélioré la sensibilité du système, celle-ci étant limitée par les fluctuations du courant photoélectrique émis par la couche sensible (effet de grenaille). Il a donc semblé que la photométrie photographique pouvait seule convenir à l'étude de ces faibles flux lumineux ; la plaque photographique étant sensible aux éclairements et non aux flux, on peut faire varier l'éclairement en modifiant les dimensions de la tache de diffraction : si le flux lumineux est constant, l'éclairement obtenu est inversement proportionnel à la surface de la tache : c'est dire qu'il sera proportionnel à α'^2. Cependant il ne conviendrait pas de réduire notablement les dimensions de l'image, la granulation de la couche sensible pouvant affecter la précision des mesures. Nous allons maintenant étudier le montage effectué et les résultats obtenus.

II. **Principe de la méthode photographique.**

A) *Montage optique.* — 38. Pour des raisons de commodité, nous avons utilisé la raie verte du mercure ($\lambda = 0{,}5461\mu$) ; le montage se compose donc d'une lampe à mercure, d'un monochromateur et d'un système optique convenable.

La source est une lampe à vapeur de mercure Philips HP 300, dont la brillance est suffisante et dont l'émission spectrale possède un fond continu beaucoup plus faible que celui de la lampe SP 500.

L'établissement du monochromateur et du système optique a été guidé par les considérations suivantes : pour obtenir une parfaite rigidité il était nécessaire de fixer toutes les pièces sur un même banc ; leur distance était donc limitée. Le système optique ne pouvait cependant présenter des aberrations appréciables qu'à la condition que le diamètre de sa pupille ne soit pas trop petit ; il devenait néces-

saire d'utiliser à la sortie du monochromateur un faisceau d'ouverture angulaire suffisante, ce qui nous a amené à réduire convenablement le diamètre du trou de sortie, pour les raisons indiquées au paragraphe 37 ; pratiquement, nous avons réussi à obtenir, par perforation de clinquant d'aluminium à l'aide d'une pointe d'acier, un trou très sensiblement circulaire de 0,04 mm.

L'emploi d'un trou d'aussi petites dimensions nécessite cependant des précautions particulières. Les défauts, les poussières situées sur les pièces optiques du monochromateur ou du condenseur donnent naissance, après passage dans ce

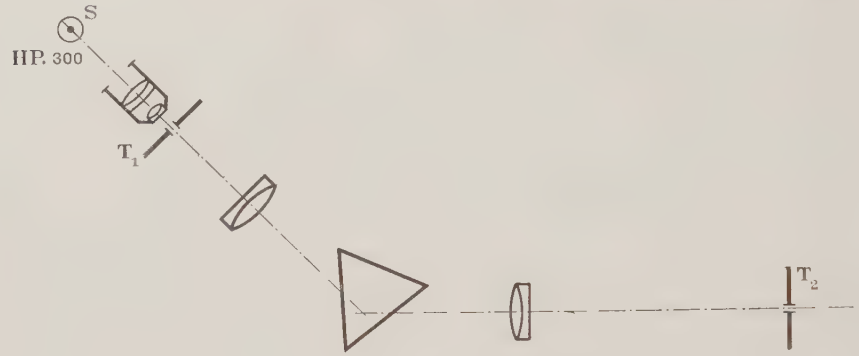

Fig. 32. — Source et monochromateur.

trou minuscule, à de sombres (en réalité à des phénomènes de diffraction), qui produisent des variations d'intensité lumineuse du trou avec la direction du rayon émergent. Il est nécessaire de prendre le plus grand soin dans le choix des pièces

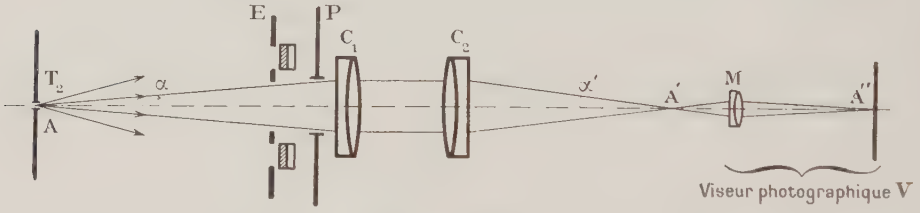

Fig. 33. — Montage optique (vu en plan).

optiques et de n'utiliser que des surfaces parfaitement polies, exemptes de rayures et convenablement nettoyées. L'ensemble doit être efficacement protégé contre les poussières. Pratiquement, un objectif de microscope retourné nous a servi de condenseur ; les objectifs du monochromateur étaient des objectifs de Clairaut fournis par la Société Générale d'Optique.

Signalons enfin que l'image du trou d'entrée T_1 du monochromateur était beaucoup plus grande que le trou de sortie, ce qui évitait que le monochromateur ne se dérègle par suite des dilatations ou des vibrations. La figure 32 représente le montage de la source, du condenseur et du monochromateur.

La constitution du système optique dépend de la nature du phénomène que l'on désire étudier :

Pour l'étude de la tache d'Airy et des défauts de mise au point, il était constitué par deux bons objectifs de Clairaut C_1 C_2 (objectifs de télémètre S O M) formant de T_2 une image A′ agrandie ultérieurement par un objectif de microscope M de faible grossissement (objectif de Clairaut de la maison B B T solidaire de la pellicule photographique située en A″ (fig. 33) ; l'ensemble de M et de la pellicule constitue un viseur photographique pointant à une distance fixe en avant de M. L'ensemble était diaphragmé par une ouverture circulaire P taillée dans une plaque de laiton, dont le schéma en coupe est représenté sur la figure 34. Nous nous sommes assuré que dans ces conditions, ni l'objectif M ni les objectifs de Clairaut n'introduisent d'aberration appréciable. On a pu ainsi étudier la tache d'Airy et divers défauts de mise au point ($\lambda/4$ et λ) en déplaçant le viseur photographique de quantités convenables (voir § 46).

En introduisant sur le trajet du faisceau une lentille cylindrique, on peut obtenir en A′ un astigmatisme variable, la mise au point du viseur pouvant être effectuée sur une « focale » ou sur le « cercle de moindre diffusion ».

Fig. 34
Coupe du diaphragme.

B) *Photométrie photographique.* — 39. La répartition des éclairements dans le phénomène de diffraction doit être déduite de l'étude des noircissements dans une photographie du phénomène obtenu en A″. On a disposé pour cela, un peu en deçà de P, un double coin photométrique destiné à effectuer un étalonnage de la photographie de part et d'autre d'une ouverture destinée à laisser passer le faisceau principal, on a fixé deux coins identiques disposés tête bêche. Ce montage permet de comparer la répartition des éclairements dans le phénomène de diffraction à l'éclairement obtenu dans le plan de l'écran E.

Le mode opératoire est le suivant :

On découpe (fig. 35) dans la pellicule photographique (Commercial Ortho de la maison Ilford) deux rectangles juxtaposés, que nous appelons I et II et sur lesquels les phénomènes de diffraction et les plages d'étalonnage auront les positions indiquées ; on effectue alors deux poses ayant approximativement même durée ; pendant la première, la pellicule I enregistre le phénomène, tandis que II est placée en E (par exemple du côté droit de E) ; pendant la seconde pose, la pellicule II enregistre le phénomène, pendant que I est placée derrière l'écran E (à gauche). On fera évidemment la moyenne des résultats obtenus sur les deux pellicules, ce qui présente les avantages suivants :

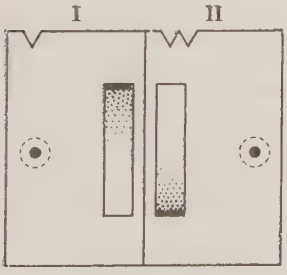

Fig. 35.

1° On n'utilise pas les courbes de noircissement de l'émulsion, courbes qui peuvent être influencées par de multiples facteurs. On admet seulement qu'à égalité de noircissement, il y a égalité de flux lumineux, les poses étant effectuées dans les mêmes conditions et les pellicules étant traitées simultanément.

2° On élimine l'influence d'un certain nombre de causes d'erreur :

a) variation de l'intensité de la source dans le temps ;

b) inégalité des temps de pose pour les pellicules I et II ;

c) variation continue de la sensibilité de la pellicule ;

d) variation continue de l'éclairement dans le plan de l'écran E ;

e) évolution de l'image latente.

L'ensemble de deux photographies obtenues permet d'étudier dans le phénomène de diffraction des éclairements pouvant varier dans le rapport de 1 à $\sqrt{10}$ (la variation de densité des écrans E étant un peu supérieur à 1/2) ;

En interposant des densités optiques convenables devant A'' ou devant E, suivant le cas, ou encore en faisant varier le grandissement de l'objectif M, on peut étudier d'autres gammes d'éclairement. C'est ainsi que dans le cas de la tache d'Airy, nous avons utilisé 7 couples de photographies permettant d'étudier des éclairements variables de 1 à 2.10^{-4} (voir § 46).

Le développement était effectué par badigeonnage à l'aide d'une peau de chamois montée sur un manche de caoutchouc souple, ce qui évitait de rayer la pellicule et assurait un très bon renouvellement du révélateur au contact de la gélatine. Le révélateur était dilué et utilisé à une température voisine de 18° (1). La pellicule était ensuite trempée dans un bain d'arrêt et de tannage (alun de chrome) et fixée en deux bains ; le rinçage final était effectué à l'eau distillée filtrée et l'on faisait sécher la photographie dans un courant d'air soigneusement débarrassé des poussières par passage dans un tube rempli de billes de verre graissées. L'étude des clichés était effectuée à l'aide du microphotomètre Chalonge de l'Institut d'Optique.

C) *Dépouillement des enregistrements. Correction de dimensions du trou objet.* — 40. Par comparaison des enregistrements de la photographie du phénomène et de la plage d'étalonnage, on obtient sans difficultés la répartition des éclairements dans la tache de diffraction obtenue en A'' ; cependant celle-ci n'est pas identique à la tache relative à l'image d'un point, du fait des dimensions appréciables du trou objet. Lorsque la source est un trou circulaire, on obtient l'éclairement en un point A du plan image en cherchant le volume commun au solide de diffraction $x = f(y,z)$ représentant l'image d'un point et au cylindre de révolu-

(1) Sa composition était la suivante (pour 1 litre) :

Métol	1 g
Sulfite de soude anhydre	75 g
Hydroquinone	9 g
Carbonate de sodium	25 g
Bromure de potassium	5 g

tion dont le diamètre est égal à celui de l'image de la source, placée de sorte que son centre soit situé au point A de coordonnées y_0, z_0. Si l'on utilise des coordonnées polaires ρ et φ ayant A pour origine (fig. 36), la répartition des éclairements peut être représentée par la fonction

$$\pi r^2 F(y_0, z_0) = \int_0^{2\pi} \int_0^{r} f(y_0 + \rho \cos\varphi,\ z_0 + \rho \sin\varphi)\, \rho\, d\rho\, d\varphi.$$

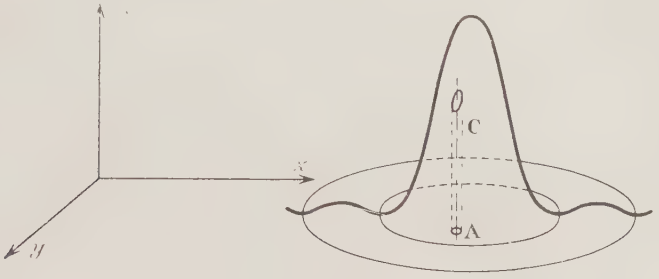

Fig. 36.

Si l'on développe $f(y, z)$ par la formule de Taylor et que l'on effectue les intégrations nécessaires, on obtient aisément :

$$F(y_0, z_0) = f(y_0,z_0) + \frac{r^2}{8} (f''_{y_0^2} + f''_{z_0^2}) + \varepsilon_4, \qquad (20)$$

où ε_4 désigne un infiniment petit de l'ordre de r^4. Dans la mesure où l'on peut assimiler $f(y,z)$ à un polynôme du 3e degré au voisinage du point de coordonnées y_0, z_0, la formule précédente permettra de relier la répartition expérimentale des éclairements, représentée par $F(y_0,z_0)$, à la répartition théorique dans le solide de diffraction. Il nous reste à exprimer $f(y_0,z_0)$ en fonction de $F(y_0,z_0)$: ces deux fonctions étant égales à des termes en r^2 près, il en sera de même de leurs dérivées secondes et l'on pourra écrire, en ne négligeant que des infiniment petits de l'ordre de r^4 et en supprimant les indices de y_0, z_0 devenus inutiles :

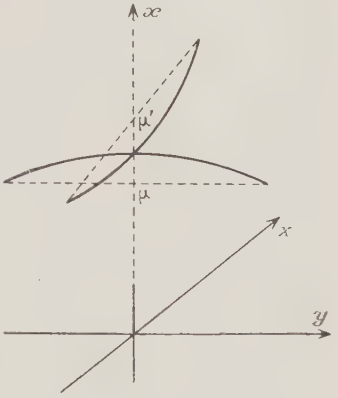

Fig. 37.

$$\frac{r^2}{8} (f''_{y^2} + f''_{z^2}) = \frac{r^2}{8} (F''_{y^2} + F''_{z^2}).$$

On en déduit immédiatement :

$$f(y,z) = F(y,z) - \frac{r^2}{8} (F''_{y^2} + F''_{z^2}) + \varepsilon'_4.$$

Représentons les sections de la surface d'équation $x = F(y,z)$ par les plans $y = C^{te}$ et $z = C^{te}$ (fig. 37) et marquons sur chacune les points de coordonnées

$y \pm r$, $z \pm r$; soit μ la flèche de la courbe de section par le plan $y = \text{C}^{te}$, μ' la quantité correspondante pour l'autre section ; on a sensiblement :

$$\mu = \frac{r^2}{2} F''_{y^2}, \qquad \mu' = \frac{r^2}{2} F''_{z^2},$$

ou encore :

$$f(y,z) = F(y,z) - \frac{\mu + \mu'}{4} \tag{21}$$

On voit que l'on pourra aisément effectuer la correction de dimensions du trou objet à l'aide d'une construction graphique, puisque cette correction s'exprime en fonction des flèches des sections du solide par les plans $y = \text{C}^{te}$ et $z = \text{C}^{te}$.

La relation (21) est approximative, mais il est possible d'exprimer les termes de 4e ordre, que nous avons négligés. On trouve que l'erreur commise est égale à $-\frac{r^4}{48}(f''''_{y^4} + f''''_{y^2z^2} + f''''_{z^4})$; et dans le cas du maximum central de la tache d'Airy, cette expression prend la valeur — 1/2 $(\pi\alpha' r/\lambda)^4$; cette erreur est inférieure à 1/100 si l'image du trou objet est environ 5 fois plus petite que le premier anneau noir de la tache d'Airy. C'est sensiblement la valeur que nous avons adoptée.

III. Etude de la précision de la méthode. Influence des diverses erreurs.

A) *Influence des défauts du système optique.* — 41. Le phénomène de diffraction que l'on photographie peut être affecté par certaines imperfections du montage optique. Nous avons déjà signalé au § 38 que les rayures ou la présence de poussières étaient très nuisibles à la qualité du monochromateur ; il en est de même du système destiné à produire le phénomène de diffraction ; il est en fait relativement facile de se procurer des surfaces optiques parfaitement polies, mais on devra contrôler fréquemment qu'aucun grain de poussière n'est venu se déposer sur le trajet du faisceau ; le diamètre de la pupille étant assez petit (3 mm, 5), la présence d'une poussière très ténue pourra modifier le phénomène de diffraction et particulièrement la répartition de la lumière dans les anneaux. L'inspection à la loupe du phénomène obtenu suffit généralement à déceler la présence d'un parasite, mais on ne peut effectuer ce contrôle au cours de la pose photographique, il peut donc arriver que certaines photographies soient à rejeter.

Les défauts de centrage du système optique ont également une influence notable. On sait en effet que les tolérances relatives au montage mécanique des lentilles varient rapidement avec leur ouverture. Signalons simplement que dans certains cas la précision de l'usinage courant peut devenir insuffisante.

B) *Erreur propres à la photométrie photographique.* — 42. Lorsqu'on a éliminé les différentes causes d'erreurs signalées au § 39 par une compensation convenable entre les deux poses, divers phénomènes peuvent encore être la source d'erreurs appréciables ; nous ne citerons que ceux qui nous ont paru être les plus importants :

1) La diffusion de la lumière dans la couche de gélatine peut nuire considérablement à la précision lorsque le phénomène à étudier présente des variations rapides d'éclairement, ce qui était le cas de la plupart des phénomènes de diffraction que nous avons étudiés. Nous avons déterminé l'ordre de grandeur de la diffusion de la façon suivante : on masque la moitié d'un phénomène de diffraction d'Airy par une lame de rasoir disposée de façon qu'aucun rayon diffusé par la gélatine vers la lame ne vienne tomber sur la couche sensible (fig. 38) (il suffit pour cela de donner à la lame une inclinaison supérieure à 45°) ; on expose la photographie de façon à faire apparaître les premiers anneaux de la tache d'Airy et l'on passe au microphotomètre, suivant l'axe de symétrie de la figure obtenue (fig. 39) ; les éclairements des anneaux successifs étant connus, il est facile de voir à quelle distance de la lame de rasoir le noircissement dû à la diffusion correspond à l'éclairement du 1er, du 2e, du ne anneau ; pratiquement la diffusion des pellicules utilisées n'était pas gênante, puisqu'à 0 mm,5 du bord de la lame le noircissement correspondait à un éclairement égal à 5/1000 de l'éclairement du maximum central.

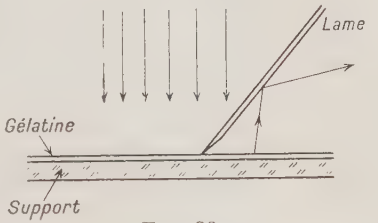

Fig. 38.

2) L'effet Eberhardt peut être convenablement réduit si l'on utilise des plages d'étalonnage dont les dimensions sont comparables à celles des phénomènes de diffraction ; notre étalonnage était effectué sur un rectangle n'ayant que 3 mm de largeur. On a, d'autre part, badigeonné constamment au cours du développement et attendu que l'action du révélateur soit complète (durée du développement : 10 minutes à 18°).

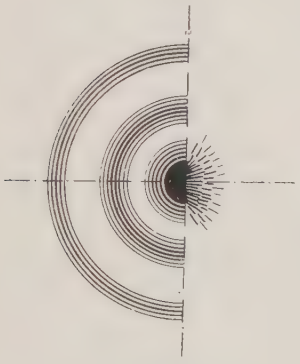
Fig. 39.

3) Il nous était impossible d'utiliser des plaques et le film photographique employé n'est pas parfaitement rigide : il se déforme souvent au cours du séchage ; on peut donc s'attendre à de légères erreurs sur la valeur des abscisses, dues à la déformation du support.

4) Fluctuations de densité. Les fluctuations obtenues dans l'enregistrement d'une plage quelconque ne résultent pas uniquement de la granulation de la couche sensible : nous avons enregistré la photographie d'une plage d'étalonnage (après nous être assuré de la bonne qualité optique du coin porté par l'écran E, et de l'uniformité du faisceau), puis une petite plage uniformément éclairée ; nous avons pris successivement pour trou d'entrée du microphotomètre, un rectangle de $0{,}25 \times 0{,}5$ mm, puis un carré de 1×1 mm (rapport de surfaces égal à 8) (fig. 40) ; nous pouvons constater que lorsqu'on utilise une grande surface exploratrice, les

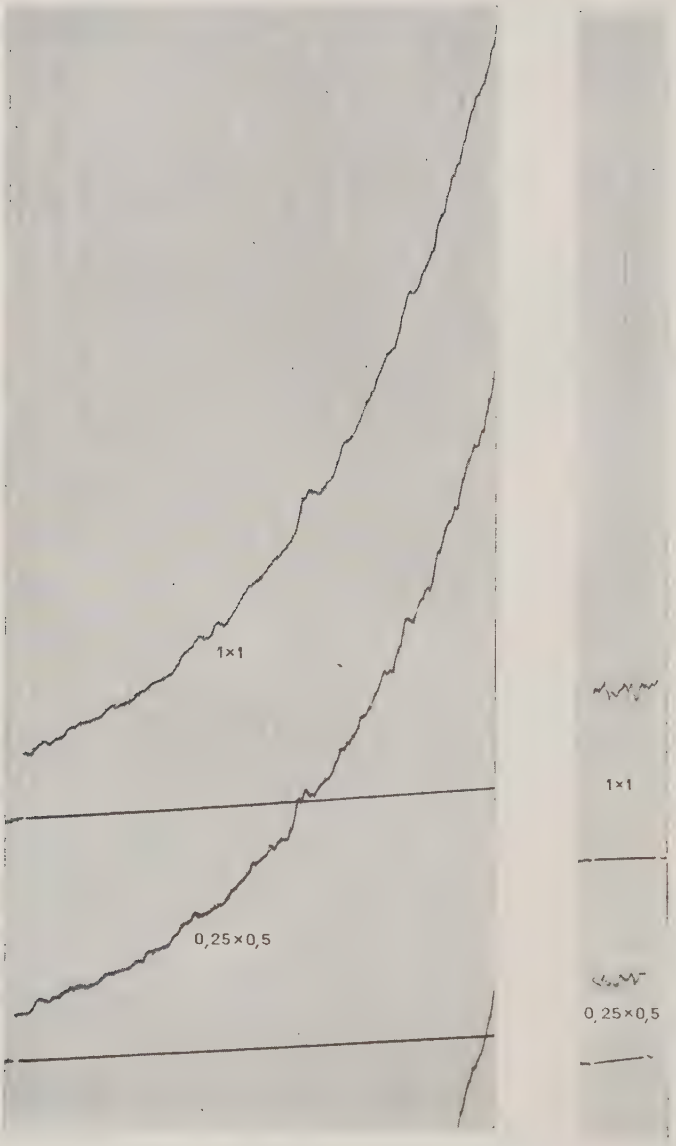

Fig. 40. — Etude de l'influence des dimensions du trou explorateur du microphotomètre sur l'importance des fluctuations obtenues dans l'enregistrement.
Les droites légèrement obliques représentent la dérive, c'est-à-dire définissent pour chaque abscisse le zéro de l'appareil. Les chiffres inscrits au-dessous de chacune des courbes indiquent en millimètres les dimensions du trou d'entrée du microphotomètre ; l'image de ce trou sur la pellicule est environ 9 fois plus petite linéairement.
On voit à gauche deux enregistrements d'une même plage d'étalonnage, à droite deux enregistrements d'une plage uniformément éclairée.

fluctuations rapides que l'on peut attribuer au grain s'atténuent notablement, mais qu'il subsiste des fluctuations de densité qui se reproduisent fidèlement dans

les deux enregistrements et dont la période est de l'ordre de grandeur du millimètre. Celles-ci n'influent pas sur la précision obtenue dans la photométrie de plages assez étendues, où l'éclairement varie lentement, mais elles peuvent produire des erreurs importantes dans le cas qui nous intéresse, où le phénomène photographié présente des variations très importantes d'éclairement sur des espaces inférieurs au millimètre ; ces fluctuations peuvent se traduire par des erreurs relatives sur l'éclairement de l'ordre de 7 à 8 % ; lorsque le phénomène est de révolution nous avons effectué la moyenne des résultats obtenus dans deux sections rectangulaires, ce qui équivaut pratiquement à faire la moyenne de quatre mesures pour chaque photographie, soit huit mesures ; dans le cas de l'astigmatisme on fait la moyenne des noircissements obtenus en deux points symétriques par rapport au centre, c'est-à-dire la moyenne de deux mesures pour chaque photographie.

5) Dans le dépouillement des enregistrements obtenus au microphotomètre, on ne peut déterminer les abscisses qu'avec une précision de l'ordre de 0,2 mm ; il en résulte sur les courbes que nous présenterons au § 43 une incertitude sur la valeur de l'abscisse w qui est généralement de l'ordre de 0,2, exception faite de la figure 41 (nous avons dû dans ce cas employer au microphotomètre une amplification plus faible, ce qui donnait une incertitude de l'ordre de 0,4).

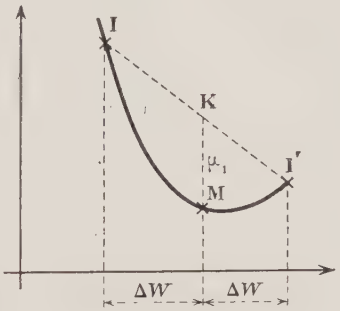

Fig. 41.

C) *Incertitude sur la correction de dimension du trou objet.* — 43. La correction étudiée au § 40 présente une certaine incertitude lorsque la courbe passe par un minimum quasi nul et que l'on est au voisinage d'éclairements importants ; une très légère erreur sur l'abscisse du point I (fig. 41) servant à déterminer la flèche MK $= \mu$ produit une erreur très importante sur son ordonnée et par conséquent sur la valeur de la correction ; il en résulte que les minima des courbes sont connus avec une précision relative souvent mauvaise ; c'est le cas du premier anneau noir de la tache d'Airy (fig. 42), où l'on a reporté entre parenthèses un point pour lequel la correction graphique conduit à une valeur négative de l'éclairement égale à — 1/1 000, alors que la correction est de l'ordre de 5/1 000 ; une erreur de 0,2 sur la valeur de w suffit à expliquer ce résultat.

D) *Conclusion.* — 44. La discussion qui précède montre que la photométrie photographique permet de déterminer la valeur des maxima d'éclairement avec une précision de l'ordre de 2 à 3 % (l'influence des fluctuations de densité est réduite du fait de la lenteur des variations d'éclairement) ; nous verrons que cette précision est le plus souvent atteinte ; dans le cas où l'éclairement varie rapidement, la précision est moins bonne, mais le lecteur pourra déterminer dans chaque cas l'origine des erreurs (signalons aussi que les courbes théoriques rela-

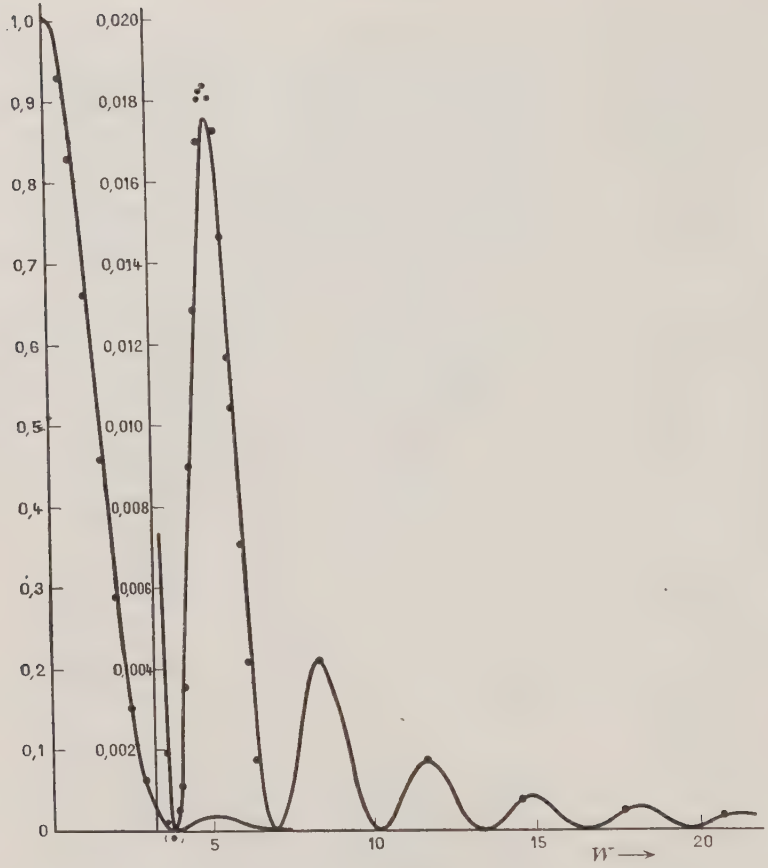

FIG. 42. — Tache d'Airy.

tives à l'astigmatisme ont été déterminées à l'aide de l'intégrateur avec la précision indiquée au § 29).

IV. **Résultats expérimentaux.**

A) *Présentation des résultats.* — 45. Nous présentons ci-dessous une série de résultats en figurant dans chaque cas la courbe théorique en trait continu :

— tache d'Airy, fig. 42, que nous avons étudiée jusqu'au 6e anneau brillant ; à partir du 1er anneau l'échelle utilisée en ordonnées est 50 fois plus grande qu'au centre ;

— défaut de mise au point égal à $\lambda/4$: fig. 43 ;

— — λ : fig. 44 [1] ;

— astigmatisme égal à $\pm$ 1,275 λ ; mise au point en voisinage d'une focale :

(répartition des éclairements le long de la focale : fig. 45 ;

(— — perpendiculairement à la focale : fig. 46 ;

[1] Ce résultat a été obtenu au cours d'une première série d'expériences où la précision était inférieure à la précision atteinte dans les autres cas.

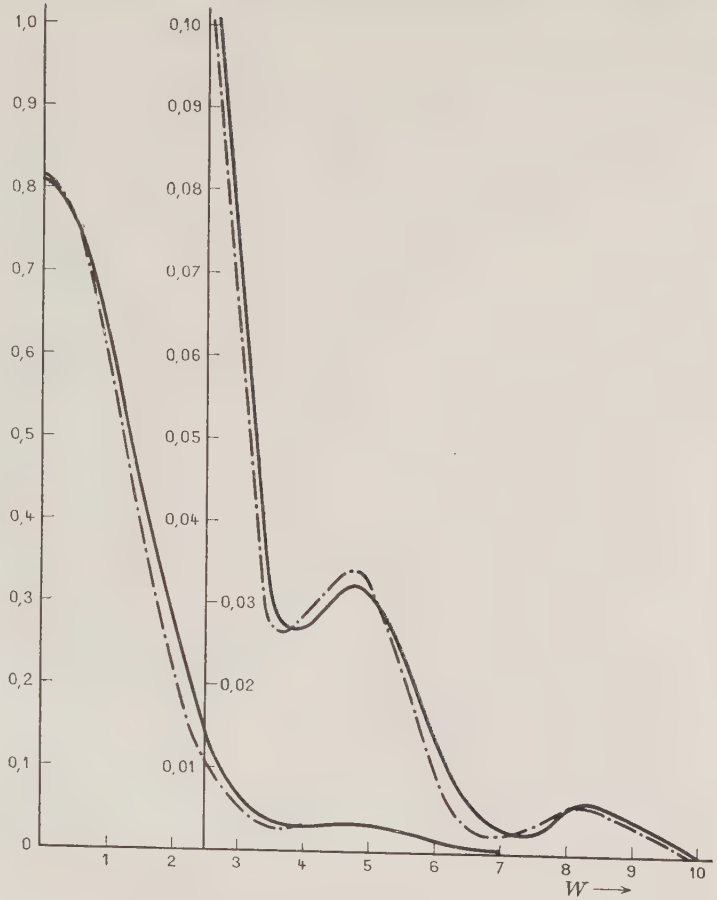

FIG. 43. — Défaut de mise au point égal à λ/4.

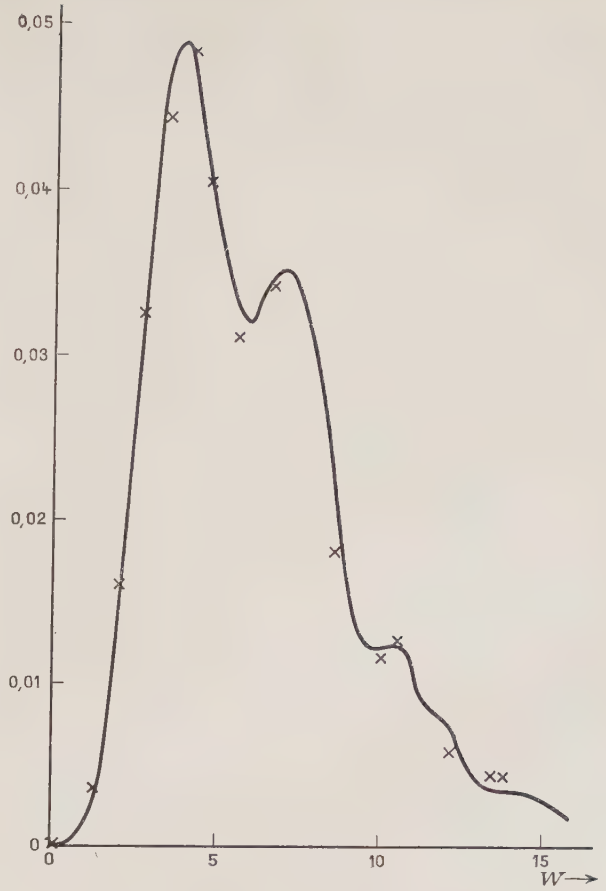

FIG. 44. — Défaut de mise au point égal à λ.

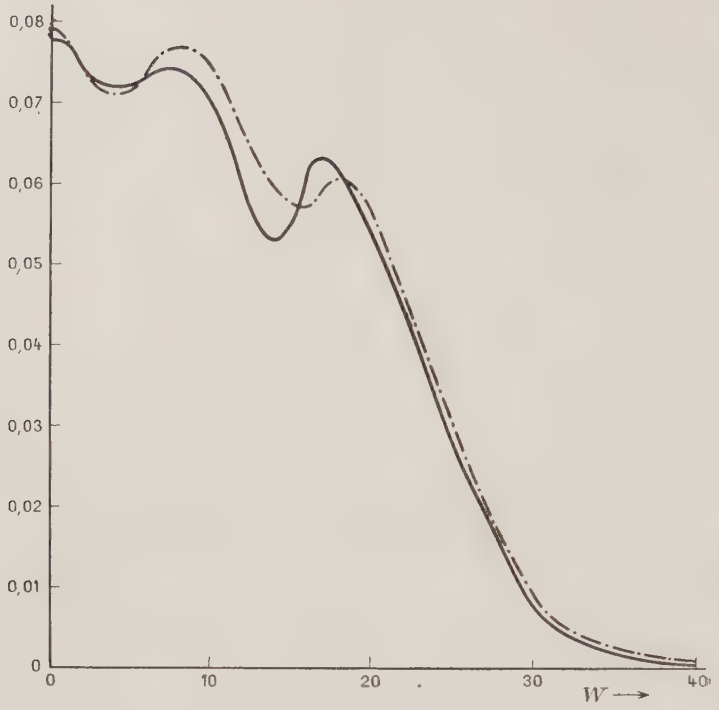

Fig. 45. — Répartition des éclairements le long d'une focale (astigmatisme égal à ± 1,275 λ).

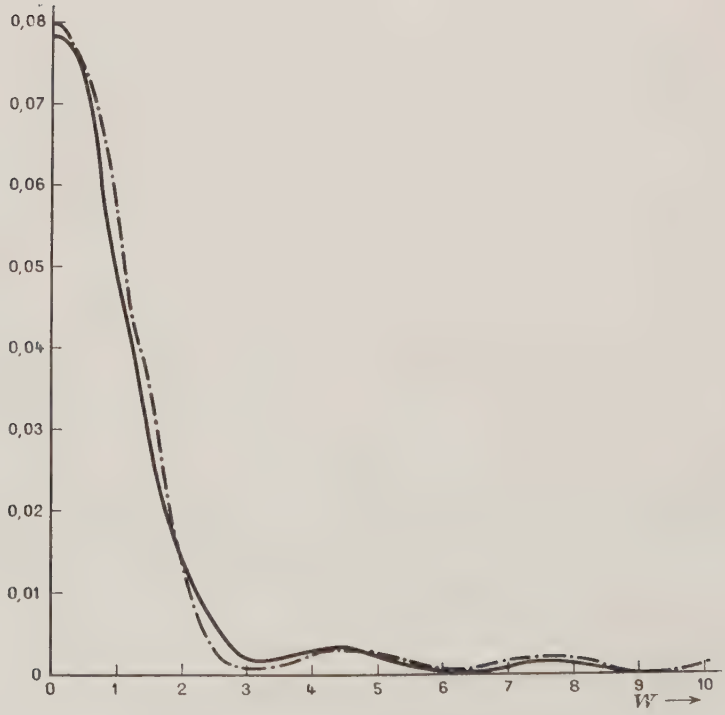

Fig. 46. — Répartition des éclairements dans le plan de symétrie perpendiculaire à la focale.

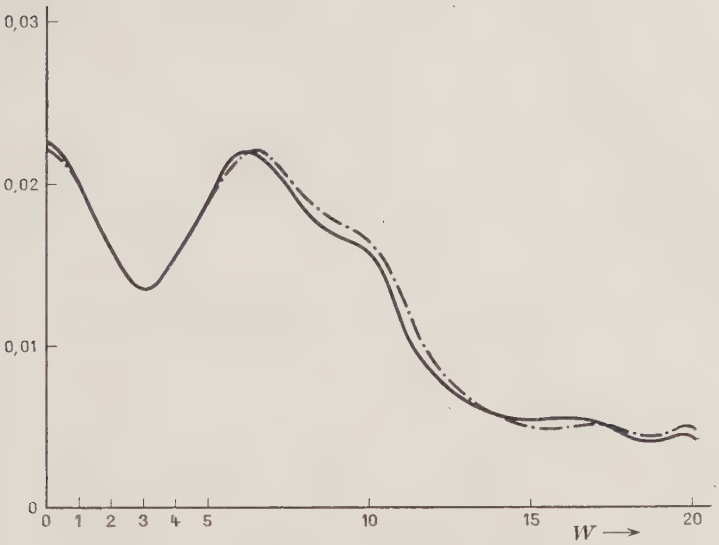

FIG. 47. — Etude du « cercle de moindre diffusion ».
Section par un plan méridien de symétrie.

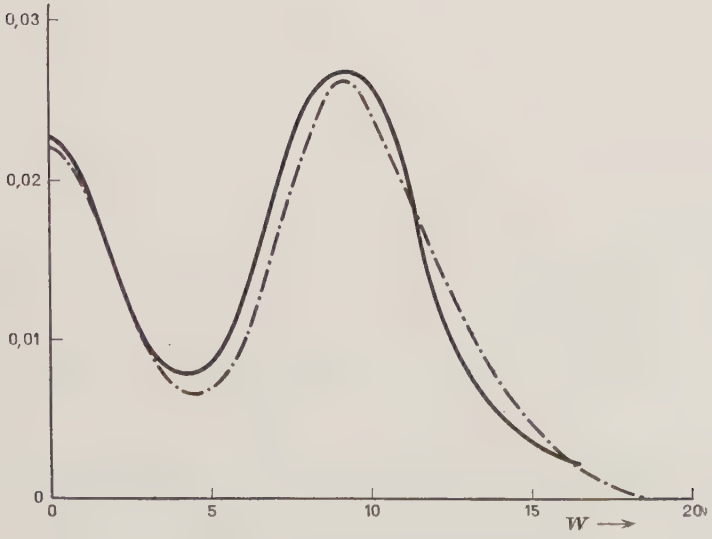

FIG. 48. — Etude du « cercle de moindre diffusion ».
Section par un plan orienté à 45° du plan méridien de symétrie.

— astigmatisme égal à + 1,275 λ ; mise au point sur le cercle de moindre diffusion :

(section par un plan méridien de symétrie : fig. 47 ;
(— à 45° du précédent : fig. 48.

Nous constatons que dans l'ensemble les résultats théoriques et expérimentaux concordent avec la précision que l'on pouvait espérer à la suite de la discussion du chapitre III.

B) *Détails expérimentaux.* — Précisons maintenant quelques valeurs numériques et certains détails relatifs aux montages et à la conduite des calculs accessoires.

1) *Tache d'Airy.* — 46. Il a été nécessaire de réduire considérablement les dimensions de l'image photographique de la tache pour parvenir à étudier les anneaux lointains : l'éclairement relatif des 4e, 5e, 6e anneaux est en effet inférieur à 1/1 000. Le tableau suivant indique, en fonction des valeurs approximatives des limites de la gamme d'éclairement que l'on étudie la valeur de la densité (positive lorsqu'elle est placée devant l'image A′, fig. 33, négative si on la place devant l'écran E), ainsi que les valeurs du grandissement du viseur V et du temps de pose.

Eclairement	Densité	Grandissement	Temps de pose
1 à $10^{-1/2}$	1,035	$\beta_0 = 8{,}18$	1,5 minute
$10^{-1/2}$ à 10^{-1}	0,500	»	»
10^{-1} à $10^{-3/2}$	0	»	»
$10^{-3/2}$ à 10^{-2}	— 0,500	»	5 minutes
10^{-2} à $10^{-5/2}$	— 0,960	»	15 minutes
$10^{-5/2}$ à 10^{-3}	— 0,960	$\beta_0 \times 10^{-0{,}252}$	15 minutes
$10^{-3{,}2}$ à $10^{-3{,}8}$	— 1,277	$\beta_0 \times 10^{-0{,}523}$	1 heure

2) *Etude des défauts de mise au point.* — 47. On doit déterminer, en fonction du déplacement longitudinal du viseur photographique V (fig. 33), le défaut de mise au point évalué en différence de chemin optique. Les deux objectifs C_1, C_2 (fig. 33) étaient rigoureusement identiques et le trou T_2 placé au foyer objet de C_1 (réglage par autocollimation sur un miroir plan) ; en conséquence l'ouverture angulaire α' du faisceau dans l'espace image était égale à la valeur correspondante α dans l'espace objet, valeur que l'on peut calculer à l'aide du diamètre de la pupille

d'entrée P (3,397 mm) et de la distance T_2P (600 mm). La différence de marche Δ correspondant à un déplacement δx du viseur est de l'ordre de $\frac{\alpha'^2}{2}\,\delta x$ (voir ci-dessous), mais ceci n'est qu'une valeur approximative, valable lorsque δx est petit par rapport au rayon de courbure de l'onde incidente. Or, la surface d'onde utilisée ne peut être arbitraire : l'amplitude et la phase ne sont constantes sur une calotte sphérique centrée sur l'image A′ que si l'on choisit celle qui traverse la pupille de sortie (on évite ainsi les perturbations apportées par les phénomènes de diffraction dans l'ombre du contour de la pupille). Remarquant seulement que l'ouverture α' est petite, on pourra exprimer aisément la différence de marche Δ en fonction de la demi-ouverture h (fig. 49) :

$$\Delta = \frac{h^2}{2}\left(\frac{1}{\overline{P'A'}} - \frac{1}{\overline{P'B'}}\right) = \frac{h^2}{2}\left(\frac{1}{\overline{P'A'}} - \frac{1}{\overline{P'A'} + \delta x}\right);$$

on en tire :

$$\delta x = \frac{2\Delta}{\alpha'^2}\,\frac{1}{1 - \dfrac{2\Delta}{\overline{P'A'}\,\alpha'^2}},$$

formule qui nous a permis de calculer δx en fonction de Δ.

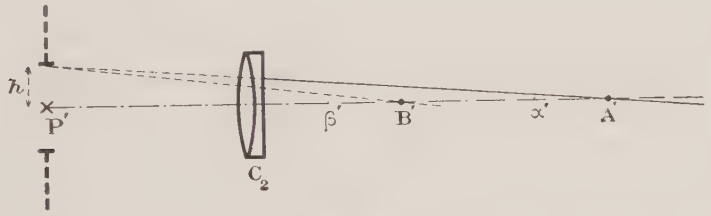

Fig. 49.

Lorsque $\Delta = -\frac{\lambda}{4}$, on trouve, avec $P'A' = 740$ mm, $\delta x = -32{,}5$ mm.

D'autre part le paramètre W habituellement utilisé pour définir un point de la tache de diffraction est égal à $\frac{2\pi}{\lambda}\,y\beta'$, β' étant le demi-angle d'ouverture indiqué sur la figure 49. Le coefficient de proportionnalité entre W et y (rayon de la tache située en B′) sera donc variable avec la position de B′.

Enfin l'énergie totale répartie dans le phénomène de diffraction étant constante et les dimensions de la tache étant inversement proportionnelles à β', l'éclairement sera proportionnel à β'^2, facteur dont l'on tiendra compte dans le dépouillement des expériences, en multipliant par $\frac{\alpha'^2}{\beta'^2}$ les résultats obtenus.

3) *Astigmatisme.* — 48. Il y a lieu de placer la lentille cylindrique entre l'objet A et le diaphragme circulaire P (fig. 33), afin d'éviter que la pupille de sortie ne

subisse une anamorphose et ne devienne elliptique. On doit d'autre part éviter de la placer devant l'écran E ; pratiquement nous l'avons placée entre E et P.

Le viseur V restant pointé sur A′, pour l'étude d'une focale on pourra calculer aisément dans l'espace objet l'astigmatisme introduit par cette lentille, si l'on connaît les valeurs de ses convergences dans les deux méridiens principaux : l'étude interférentielle des faces a permis de déceler une légère convexité de la face plane, de sorte que la convergence de la lentille dans un plan parallèle aux génératrices de la face cylindrique n'était pas nulle ; dans l'autre méridien, la mesure de la distance focale a donné $f = 962{,}5$ mm ; il suffit ensuite de déterminer les abscisses des focales A_1A_2 conjuguées de A dans L, d'où l'on déduit les défauts de mise au point obtenus dans les deux méridiens principaux :

$$\Delta_1 = \frac{h^2}{2}\left(\frac{1}{\overline{PA_1}} - \frac{1}{\overline{PA}}\right), \qquad \Delta_2 = \frac{h^2}{2}\left(\frac{1}{\overline{PA_2}} - \frac{1}{\overline{PA}}\right).$$

Pratiquement l'astigmatisme était $\Delta_1 - \Delta_2 = 2 \times 1{,}275\ \lambda$ et le défaut de mise au point permettant, par un déplacement convenable de V, de pointer sur le « cercle de moindre diffusion » $\dfrac{\Delta_1 + \Delta_2}{2} = 1{,}380\ \lambda$.

Signalons enfin que l'introduction de la lentille convergente a deux effets photométriques dont il y a lieu de tenir compte :

1°) elle ne transmet que 93 % du flux incident (on a déduit ce facteur de transmission de la mesure des facteurs de réflexion des faces) ;

2°) elle concentre légèrement le flux lumineux sur la pupille d'entrée ; on peut calculer cet effet en déterminant à partir des distances $\overline{PA_1}$, $\overline{PA_2}$ les longueurs des axes de l'ellipse qu'on obtient en coupant le faisceau pénétrant dans le trou circulaire P par le plan de L, et en comparant sa surface à celle du cercle que l'on avait avant l'introduction de L. L'effet n'est d'ailleurs que de l'ordre de 1 %, par suite de la faible valeur de la distance LP.

48. *Présentation de quelques photographies.* — 49. Nous reproduisons sur la figure 50 des agrandissements (× 3,5) de photographies de quelques phénomènes de diffraction ; nous avons choisi à titre d'exemples quatre pellicules représentant :

a) les anneaux lointains de la tache d'Airy ;

b) le premier anneau de la tache obtenue en présence d'un défaut de mise au point égal à $\lambda/4$;

c) les franges peu lumineuses obtenues au voisinage d'une focale d'astigmatisme (astigmatisme de $\pm 1{,}275\ \lambda$) ;

d) le « cercle de moindre diffusion » dans le même cas d'astigmatisme.

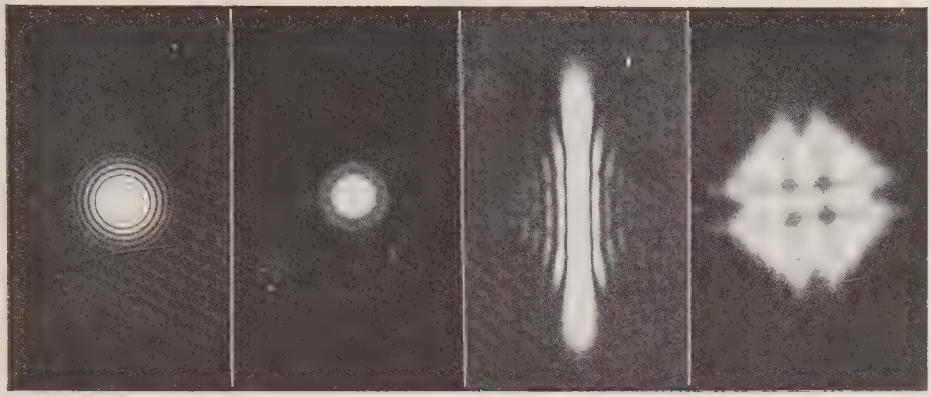

Fig. 50 (*a. b. c. d.*).

Conclusion. — 50. Dans la première partie du présent travail nous avons établi pour chacune des aberrations (et dans le cas où celles-ci se superposent) des tolérances qui permettent au calculateur opticien de juger de la qualité des instruments en cours de calcul. Nous avons montré dans la deuxième partie qu'un intégrateur mécanique permet de connaître la répartition des éclairements dans les taches de diffraction en présence d'aberrations importantes et de rechercher dans chaque cas la correction optimum. Enfin les expériences que nous venons de décrire nous conduisent à penser que l'on peut effectuer le calcul des phénomènes de diffraction en appliquant le principe de Huyghens-Fresnel sans commettre d'erreur pratiquement appréciable, tout au moins lorsque la pupille de l'instrument n'est pas exceptionnellement petite.

---

[1] Hause, Woodward et Mc Clellan. — *J. O. S. A.*, April 1939, p. 147.
[2] Ch. André. — Thèse, Paris (1876).
[3] Jones et Wolfe. — *J. O. S. A.*, vol. 35 (1945), p. 559.

Ce travail a été effectué à l'Institut d'Optique. Qu'il me soit permis de remercier particulièrement Mr André Bayle qui a bien voulu construire l'intégrateur et qui a apporté à sa réalisation le concours de son ingéniosité. J'exprime enfin toute ma reconnaissance à Mlle F. Garnier et à Mr G. Rabourdin, élèves ingénieurs, pour l'aide efficace qu'ils m'ont apportée au cours de ce travail.

TABLE DES MATIÈRES

Pages

Sommaire 5

INTRODUCTION GÉNÉRALE 6

PREMIÈRE PARTIE. — Influence de faibles aberrations géométriques sur le maximum central de la tache de diffraction. Règles de correction. Tolérances 8

Chapitre I : Influence de l'éclairement au centre de la tache de diffraction sur la qualité des images optiques 8

Chapitre II : Calcul de l'éclairement au centre de la tache de diffraction en présence de faibles aberrations géométriques 11

Chapitre III : Application de la relation précédente à l'étude des variations d'éclairement au voisinage du foyer 15

Chapitre IV : Application à la recherche de tolérances pour les diverses aberrations géométriques 17

A) Expression générale de la tolérance 17
B) Aberration de sphéricité (et latitude de mise au point) 17
C) Etude de la coma ; tolérance à l'égard de la condition des sinus 20
D) Astigmatisme et courbure de champ 23
E) Superposition des diverses aberrations précédentes 23
F) Cas général : superposition d'aberrations quelconques relatives à un système centré 24

DEUXIÈME PARTIE. — Principe et construction d'un intégrateur mécanique. Exemples d'applications 27

Chapitre I : Expression mathématique des intégrales 27

Chapitre II : Principe et réalisation 28

Chapitre III : Exemples d'études 36

Chapitre IV : Utilisation de l'appareil pour la recherche de la meilleure correction des aberrations 40

Chapitre V : Cas ou le champ ou l'ouverture de l'instrument sont grands .. 44

TROISIÈME PARTIE. — Etude expérimentale de la répartition des éclairements dans les taches de diffraction 46

Chapitre I : Généralités 46

Chapitre II : Principe de la méthode photographique 47

Chapitre III : Etude de la précision de la méthode. Influence des diverses erreurs 52

Chapitre IV : Résultats expérimentaux 56

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté :

Les progrès réalisés aux Etats-Unis dans l'étude de l'infra-rouge lointain.

Vu et approuvé :
Paris, le 9 juin 1947.
Le Doyen de la Faculté des Sciences,
Jean CABANNES.

Vu et permis d'imprimer :
Le Recteur de l'Académie de Paris,
Jean CABANNES.

920. — Imp. Jouve et Cie, 15, rue Racine, Paris (N° 31.0939). — 6-48